

# Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe II – Kompetenzprofile für die Bildungsstandards aus Sicht der Stochastik und ihrer Didaktik

Rolf Biehler, Andreas Eichler, Joachim Engel & Elke Warmuth

Paderborn, Freiburg, Ludwigsburg, Berlin im Mai 2010

## Vorbemerkung

Zurzeit werden die nationalen Bildungsstandards für die Sekundarstufe II im Fach Mathematik, die eine zentrale Weichenstellung für die zukünftige Ausrichtung des Mathematikunterrichts ermöglichen, im Auftrag der Kultusministerkonferenz (KMK) formuliert.

Wir, die vier Autoren des beiliegenden Papiers, gehen davon aus, dass im Anschluss an die Bildungsstandards für die Sekundarstufe I die Leitidee *Daten und Zufall* in einer Weise fortgeschrieben werden muss, die der bildungspolitischen Relevanz der Stochastik gerecht wird. Diese ergibt sich aus der immensen Bedeutung der Stochastik für Entscheidungen und Vorhersagen in allen Bereichen des politischen, wirtschaftlichen und gesellschaftlichen Lebens und der dadurch folgerichtig herausgehobenen Bedeutung in der Hochschulausbildung, in der schätzungsweise ein Drittel aller Studierenden im Verlauf des Studiums Kenntnisse in der Stochastik nachweisen muss.

Aufgrund dieser bildungspolitischen Relevanz haben wir im Folgenden einen Entwurf für mögliche Teilkompetenzen für Standards im Bereich der Stochastik formuliert. Maßgeblich für die Formulierung der Kompetenzen waren

- die Anschlussfähigkeit an die Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe I,
- die Passung mit den Einheitlichen Prüfungsanforderungen (EPA) sowie
- die Ausrichtung im Sinne der Vermittlung von zentralen, auf der Analyse von Daten aufbauenden Ideen der modernen Stochastik.

In die Endfassung unseres Vorschlags sind die Anregungen, Ergänzungen wie auch die Kritik von Vertretern aus der Schulpraxis, der Fachstochastik an den Hochschulen sowie der Stochastik anwendenden Wissenschaften in die Formulierung aufgenommen. Für die Endfassung sind aber die Unterzeichner verantwortlich. Wir bedanken uns insbesondere bei

- Dr. Jörg Meyer (Hameln), Reimund Vehling (Hannover) und Dr. Wolfgang Riemer (Köln) für die Perspektive der Schulpraxis, der Ausbildung von Lehrkräften in der zweiten Phase sowie der Konzipierung von Schulbüchern,
- Prof. Dr. Jens-Peter Kreiß (TU Braunschweig, Vorstandsmitglied der Fachgruppe Stochastik in der Deutschen Mathematiker-Vereinigung) und Prof. Dr. Norbert Henze (KIT) für die Perspektive der universitären Fachstochastik sowie
- Prof. Dr. Göran Kauermann (Universität Bielefeld, Vorsitzender der Deutschen Arbeitsgemeinschaft Statistik) und Prof. Dr. Ulrich Rendtel (FU Berlin, Vorsitzender des Ausschusses Aus- und Weiterbildung der Deutschen Statistischen Gesellschaft) für die Perspektive der Wirtschaftswissenschaften.

Damit basiert unser Entwurf auf einer breiten Expertise von Fachleuten in der Stochastik verschiedener Bereiche. Die zentrale nationale Dachorganisation von wissenschaftlichen Fachgesellschaften und Berufsverbänden im Bereich der Stochastik, die *Deutsche Arbeitsgemeinschaft Statistik* (DAGSTAT) unterstützt unseren Entwurf.

Wir hoffen, mit unserem Entwurf wichtige Anregungen für die endgültige Formulierung der Bildungsstandards für die Sekundarstufe II im Fach Mathematik leisten zu können.

Paderborn, 06.05.2010



---

(Prof. Dr. Rolf Biehler)

Freiburg, 06.05.2010



---

(Prof. Dr. Andreas Eichler)

Ludwigsburg, 06.05.2010



---

(Prof. Dr. Joachim Engel)

Berlin, 06.05.2010



---

(Dr. Elke Warmuth)

Prof. Dr. Rolf Biehler  
 Universität Paderborn  
 Institut für Mathematik,  
 Fachgruppe Mathematikdidaktik  
 Warburger Str. 100  
 33098 Paderborn  
 Vorsitzender des Vereins zur Förderung des  
 schulischen Stochastikunterrichts

Prof. Dr. Andreas Eichler  
 Pädagogische Hochschule Freiburg  
 Institut für Mathematik und ihre Didaktik  
 Kunzenweg 21  
 79117 Freiburg  
 Sprecher des Arbeitskreises Stochastik in der  
 Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Prof. Dr. Joachim Engel  
 Pädagogische Hochschule Ludwigsburg  
 Institut für Mathematik und Informatik  
 Reuteallee 46  
 71634 Ludwigsburg  
 German Correspondent International Association of  
 Statistical Education

Dr. Elke Warmuth  
 Humboldt Universität zu Berlin  
 Institut für Mathematik  
 Unter den Linden 6  
 10099 Berlin  
 Sprecherin des Arbeitskreises Stochastik in  
 der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Dieses Paper ist online verfügbar auf <http://www.stochastik-in-der-schule.de/> und auf <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ak-stoch/>.

## Kompetenzen zur Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe II

Die folgenden sieben Kompetenzen sind so formuliert worden, dass sie in jedem Punkt unterschiedliche fachliche und methodische Herangehensweisen ermöglichen. In den sich anschließenden Kommentaren werden jeweils kurze Begründungen für die Bedeutung der Kompetenzen (Erläuterungen), mögliche zentrale Teilkompetenzen (Kernkompetenzen) sowie zum Teil einem Erweiterungsbereich zuzuordnenden Teilkompetenzen (Erweiterungen) ausgeführt. Es werden zusätzlich ergänzende Aspekte ausgeführt, die Bestandteil mehrerer vorher genannter Kompetenzen sind.

### Schülerinnen und Schüler

#### 1. planen exemplarisch zu für sie bedeutsamen Fragestellungen statistische Erhebungen.

Sie kennen die Bedingungen, die für die Anwendbarkeit von Methoden der beurteilenden Statistik notwendig sind (Randomisierung, Zufallsstichproben), und sie können dieses Wissen in eigenen exemplarischen Datenerhebungen (ein Experiment, eine Beobachtung, eine Befragung) und für die Beurteilung fremder Datenerhebungen umsetzen.

#### 2. verwenden Methoden der beurteilenden Statistik (insbesondere Konfidenzintervalle und in Erweiterung auch Hypothesentests).

Sie begründen bei ausgewählten Beispielen die Auswahl einer Methode und interpretieren die Ergebnisse auf der Basis dieser Methode sachgerecht. Sie sind in der Lage, typische Fehlschlüsse bei der Anwendung der beurteilenden Statistik zu erkennen und zu vermeiden.

#### 3. modellieren mehrstufige zufällige Vorgänge.

Dabei gehen sie bewusst mit der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit oder der stochastischen Abhängigkeit um und rechtfertigen diese im Sachkontext.

#### 4. modellieren zufällige Vorgänge mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihrer charakteristischen Kennzahlen.

Dabei beachten sie die Voraussetzungen, die bei der Modellierung einer stochastischen Situation mit einer spezifischen Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben sein müssen.

#### 5. nutzen Simulationen, um mit stochastischen Situationen zu experimentieren und Näherungslösungen in komplexeren Situationen zu gewinnen.

Sie erstellen zu einer gegebenen einfachen Problemsituation ein Simulationsmodell und führen Simulationen mit dem Rechner aus.

#### 6. kennen Grundphänomene zum Gesetz der großen Zahlen.

Sie können die Rolle des Stichprobenumfangs angemessen einschätzen und anwenden.

#### 7. modellieren statistische Trends und Zusammenhänge zweier Merkmale mit Hilfe von Funktionen.

Sie interpretieren die im Modell auftauchenden Parameter der Funktion und kennen geeignete Methoden wie die Residuenanalyse, um Abweichungen von Modell und Daten zu untersuchen.

## Kommentare zu den Kompetenzen 1 – 7:

### **Kompetenz 1 (Erhebung):**

#### ***Erläuterungen:***

Unabhängig vom speziellen Verfahren zeichnen sich effiziente Pläne zur Datenerhebung dadurch aus, dass sie die Variabilität reduzieren können und Verzerrungen oder Verfälschungen vermeiden. Durch Erhöhung des Stichprobenumfangs und durch ein klug ausgewähltes Untersuchungsdesign lässt sich die Variabilität unter Kontrolle bekommen. Verzerrungen sind hingegen die größere, weil weniger zu quantifizierende und zu kontrollierende Gefahr.

#### ***Kernkompetenzen:***

Schülerinnen und Schüler sollen

- verstehen, wie die Art der Planung von statistischen Untersuchungen die Qualität der Daten und der daraus möglichen Schlussfolgerungen maßgeblich beeinflussen kann.
- Charakteristika und Unterschiede von Untersuchungstypen sowie den Effekt der Randomisierung auf die Qualität der Schlussfolgerungen kennen und exemplarisch eine Erhebung zu für sie relevanten Untersuchungsfragen planen.
- Medienberichte und Textaufgaben in Schulbüchern kritisch im Hinblick auf die notwendigen Voraussetzungen der angewendeten Verfahren untersuchen.
- insbesondere die Bedeutung einer Zufallsstichprobe für Verallgemeinerungen kennen und Beispiele für verzerrte Stichproben in einfachen Fällen identifizieren.

#### ***Mögliche Erweiterungen:***

Schülerinnen und Schüler sollen

- zu gegebener Fragestellung eine begründete Entscheidung treffen, ob ein kontrolliertes Experiment oder eine Beobachtungsstudie vom Kontext, vom erkennenden Interesse sowie von organisatorischen und ethischen Einschränkungen ein angemessenes Design liefert.
- Vor- und Nachteile von Längsschnitt- und Querschnittsstudien beschreiben.

### **Kompetenz 2 (Beurteilende Statistik):**

#### ***Erläuterungen:***

In der statistischen Praxis hat sich die Bedeutung der Verfahren der beurteilenden Statistik von den Hypothesentests zu Konfidenzintervallen verschoben. Oft sind beide Methoden in Kombination anzuwenden. Schwerpunktsetzungen im Curriculum müssen dem Rechnung tragen. Es ist ferner darauf zu achten, dass bei Beispielen zur beurteilenden Statistik die Bedingungen der Anwendbarkeit eingehalten werden (Randomisierung, Zufallsstichproben, Kontrollgruppen bei Kausalschlüssen).

Für Schülerinnen und Schüler soll das Verständnis für Grundideen insbesondere des Schätzens aber auch des Testens Vorrang haben gegenüber einer rein algorithmischen und formalen Abarbeitung von Problemstellungen. Dadurch soll einerseits die Bedeutung dieser Standardverfahren vieler Stochastik anwendender Wissenschaften erfahren werden können, andererseits bekannte Fehldeutungen vermieden werden.

Als wesentliches Hilfsmittel für das Vermitteln dieser Grundidee dient die Simulation (siehe die entsprechende Kompetenz).

**Kernkompetenzen:**

Schülerinnen und Schüler sollen

- für die Annäherung an den Begriff des Konfidenzintervalls eines (theoretischen) Modellparameters durch Simulation zu den empirischen Daten passende Modellparameter bestimmen.
- durch Simulation die frequentistische Deutung des Konfidenzintervalls als zufällige Größe anschaulich verdeutlichen.
- durch Simulation bei einem hypothetisch angenommenen Modell Ergebnisse zukünftiger Datenerhebungen diskutieren, die für (Annahmebereich) bzw. gegen (Ablehnungsbereich) das gewählte Modell sprechen.

Erst nach der Festigung der Grundideen sollen Schülerinnen und Schüler anhand ihnen geläufiger Modelle (z.B. Binomialverteilung) lernen, wie die Berechnung von Konfidenzintervallen oder die Ausführung von Hypothesentests formal gefasst und algebraisch behandelt werden kann. Explizit sollen aber bei der nicht-formalen Einführung der beurteilenden Statistik auch solche Problemstellungen untersucht werden, die nicht auf dem Standardmodell der Binomialverteilung beruhen oder bei denen alternative Methoden, z.B. parameterfreie Tests, sinnvolle Anwendung finden können und die schließlich den Zusammenhang zwischen Schätzen und Testen verdeutlichen.

**Mögliche Erweiterungen:**

Schülerinnen und Schüler sollen

- durch Simulation zu einem Hypothesentest anschaulich verdeutlichen, was ein Fehler 1. Art ist und warum auch der Fehler 2. Art bei der Konstruktion eines Hypothesentests beachtet werden sollte.
- mit Hilfe der Simulation den Begriff der Signifikanz und auch die konventionalisierte Interpretation mit den Niveaus  $\alpha = 0,05$  und  $\alpha = 0,01$  deuten können und das Verhältnis von Stichprobengröße und Signifikanz untersuchen.
- mit Hilfe der Simulation weitergehende Fragestellungen wie etwa den Vergleich der Verteilung zweier Stichproben propädeutisch zu untersuchen.

**Kompetenz 3 (Abhängigkeit, Unabhängigkeit):****Erläuterungen:**

Dass die stochastische Unabhängigkeit eine Modellannahme ist, die durch Analyse des Kontextes oder anhand empirischer Daten plausibel begründet werden muss, soll bei der Behandlung des Begriffspaars stochastische Unabhängigkeit und stochastische Abhängigkeit deutlich gemacht werden. Fachlich bietet die allgemeine Multiplikationsformel für bedingte Wahrscheinlichkeiten einen Zugang, aus dem die stochastische Unabhängigkeit als Sonderform entsteht. Für die begriffliche Trennung eignet sich die Visualisierung mehrstufiger zufälliger Vorgänge mit dem Baum oder auch dem Einheitsquadrat, die vor einer eventuellen Formalisierung verwendet werden sollen.

Insbesondere bei der Bernoullikette und der Binomialverteilung können Schülerinnen und Schüler die wichtige Rolle der Unabhängigkeitsvoraussetzung verstehen und Sachsituationen, die in Textaufgaben und Medienberichten gegeben sind, daraufhin kritisch bewerten. Als vermittelndes konkretes Modell kann dabei das Urnenmodell dienen, aus der ohne bzw. mit Zurücklegen Kugeln gezogen werden. Die übliche Beschränkung der Beispiele allein auf Urnenmodelle führt allerdings zu einer Begriffsverengung. Auch bei einfachen Spielgeräten wie Würfeln und Glücksrad, insbesondere aber auch bei der Modellierung realer Situationen muss diskutiert werden, unter welchen Bedingungen man von stochastischer Unabhängigkeit

bei mehrstufigen Versuchen ausgehen kann und wann sie zweifelhaft ist und durch Daten überprüft werden müsste.

Während das Modell der stochastischen Unabhängigkeit für viele der in der Sekundarstufe II zu behandelnden Verfahren Voraussetzung ist, sind ebenso die Begriffe der stochastischen Abhängigkeit sowie der bedingten Wahrscheinlichkeit in der Stochastik wichtig und sollen in der Sekundarstufe II thematisiert werden.

### **Kernkompetenzen:**

Schülerinnen und Schüler sollen

- auf der Modellebene anhand einfacher Beispiele zwischen mehrstufigen zufälligen Vorgängen, deren Teilvorgänge stochastisch abhängig bzw. stochastisch unabhängig sind, unterscheiden können,
- den Einsatz stochastischer Modelle, die als Voraussetzung die stochastische Unabhängigkeit umfassen, in Sachsituationen kritisch beurteilen können,
- bedingte Wahrscheinlichkeiten visualisieren können (mit Hilfe der Vierfelder-Tafel, dem Baum mit absoluten Häufigkeiten oder mit dem Einheitsquadrat) und den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit als spezielles Modell eines mehrstufigen zufälligen Vorgangs identifizieren,
- den Satz von Bayes mit Hilfe einer Visualisierung wiedergeben, erklären und in relevanten Situationen anwenden können. Die Verwendung nicht-formaler Darstellungen des Satzes (Häufigkeitsbäume) sollen bei Aufgabenlösungen favorisiert werden.
- Verwechslungen zwischen bedingten Wahrscheinlichkeiten und Fehlschlüsse im Kontext von Fragen wie „Wie sicher sind Gesundheitstests?“ aufklären können.

### **Kompetenz 4 (Verteilungen):**

*Erläuterungen:*

Als Standardmodell steht die Bernoulli-Kette sowie Binomialverteilung im Mittelpunkt. Der Erwartungswert und die Standardabweichung werden zur Charakterisierung der Verteilung verwendet. Die Schülerinnen und Schüler verwenden den Erwartungswert als Modellgröße zur Vorhersage der durchschnittlichen Anzahl von Erfolgen bei vielen Beobachtungen und schätzen umgekehrt einen unbekanntem Erwartungswert mit Hilfe des arithmetischen Mittels. Eine Erweiterung des Standardmodells der Binomialverteilung ermöglicht die Ausschärfung des Verteilungsbegriffs, indem verschiedene diskrete Verteilungen als Modell spezifischer zufälliger Phänomene verstanden werden können. Mit der Normalverteilung kann zudem ein propädeutischer Ausblick auf stetige Modelle gegeben werden. Die Bedeutung der Normalverteilung als Modell für die Verteilung von Mittelwerten wie auch ihre Bedeutung als Approximation der Binomialverteilung und den daraus erwachsenden Näherungsverfahren im Rahmen der Konfidenzintervalle und Hypothesentests kann dabei thematisiert werden.

### **Kernkompetenzen:**

Schülerinnen und Schüler sollen

- graphische Darstellungen und Kennzahlen zur Darstellung und Analyse empirischer Häufigkeitsverteilungen von Merkmalen verwenden,
- die Binomialverteilung adäquat zur Modellierung von zufälligen Vorgängen verwenden. Sie legen Rechenschaft über die getroffenen Modellannahmen ab und ziehen prototypische Situationen wie etwa das Ziehen mit und ohne Zurücklegen bei der Modellwahl heran,
- sicher mit der Binomialverteilung, ihren Kenngrößen und ihrer typischen Gestalt, die sie aus theoretischen Herleitungen oder aus Simulationsstudien kennen, arbeiten.

- den Unterschied und die Beziehung zwischen empirischen Häufigkeitsverteilungen und einer theoretischen Binomialverteilung (u.a. Gesetz d. großen Zahlen für Verteilungen) kennen.
- zumindest eine weitere Wahrscheinlichkeitsverteilung propädeutisch (bezogen auf deren formale Berechnung, die Berechnung ihrer Kennzahlen, die Voraussetzungen für eine adäquate Modellierung) erarbeiten (siehe auch: Erweiterungen).

**Erweiterungen:**

Schülerinnen und Schüler sollen

- mit Hilfe der Binomialverteilung auch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den *Anzahl* der Erfolge in einer Bernoulli-Kette angeben können und sie zum tieferen Verständnis des Gesetzes der großen Zahlen und der Stichprobenverteilungen als Basis statistischer Verfahren nutzen.
- die Normalverteilung zur Approximation der Binomialverteilung verwenden.
- die Normalverteilung als Beispiel einer Verteilung einer stetigen Zufallsgröße, z.B. als Modell für eine Verteilung von Messgrößen (insbesondere von Mittelwerten) kennen.
- weitere Standardmodelle wie die geometrische Verteilung, die hypergeometrische Verteilung, die Exponentialverteilung oder die Poissonverteilung beispielgebunden systematisieren (Modellierungseigenschaften, Kennzahlen, Verteilungsformen).

**Kompetenz 5 (Simulation):****Erläuterungen:**

Mit Hilfe von Simulationen können Schülerinnen und Schüler bei Problemstellungen, die zunächst einer formalen wahrscheinlichkeitstheoretischen Behandlung unzugänglich sind, Lösungen erzeugen.

In einer zusätzlichen Funktion können Simulationen ebenso zu einem bekannten Modell, etwa der Binomialverteilung, eine vertiefte Einsicht in das Modell ermöglichen, indem die Auswirkung des Modells auf zukünftige Daten im Zusammenhang mit der Variierung von Modellparametern untersucht wird. In der Sekundarstufe II können Simulationen insbesondere in Verbindung mit dem Verteilungsbegriff sowie den Verfahren der beurteilenden Statistik vertiefte Einsichten von Schülerinnen und Schülern ermöglichen.

Darüber hinaus ermöglicht die Simulation je nach Kurs, Modelle, die nicht zum Kernrepertoire der Schulstochastik gehören, zu untersuchen und zu beurteilen. Dazu gehören Wartezeitprobleme (vollständige Serie) und Beispiele für geometrische Wahrscheinlichkeiten. Ferner kann die Unabhängigkeitshypothese zweier kategorialer Merkmale auch ohne formalen Test (z.B. exakter Test von Fischer oder  $\chi^2$ -Test) mit Hilfe von Simulationen näherungsweise überprüft werden.

**Kernkompetenzen:**

Schülerinnen und Schüler sollen

- zu wichtigen im Unterricht behandelten Situationen Simulationsmodelle entwerfen und in geeignete Software implementieren bzw. eine Implementation verständlich nachvollziehen.
- verständlich mit vorgefertigten Simulationsumgebungen umgehen und mit deren Hilfe Zufallsphänomene eigenständig untersuchen bzw. für eine Aufgabenbearbeitung als Alternative zu analytischen Methoden nutzen
- qualitativ die Genauigkeit und Sicherheit der Simulationsmethode einschätzen.

- exemplarische Probleme, die mit der Simulationsmethode, aber nicht mit anderen schulmathematischen Mitteln gelöst werden können, kennen.

### **Kompetenz 6 (Gesetz der großen Zahl und die Rolle des Stichprobenumfangs):**

Die Schülerinnen und Schüler haben in der Sekundarstufe I das empirische Gesetz der großen Zahlen kennengelernt (Annäherung der relativen Häufigkeit an die Wahrscheinlichkeit). Diese Kenntnisse werden in der Sekundarstufe II vertieft.

Mit dem  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz für die Verteilung der relativen Häufigkeiten in einer Bernoulli-Kette ist

das Gesetz der großen Zahlen ausreichend vorbereitet und klar als eine Aussage im Modell ausgewiesen, die das in der Realität beobachtete Stabilwerden der relativen Häufigkeiten adäquat beschreibt. Wesentlicher Kern des Verständnisses ist die gegenseitige Abhängigkeit der drei Einflussgrößen Stichprobenumfang, Genauigkeit und Sicherheit. Funktionale Betrachtungen qualitativer Art sollen dieses Verständnis vertiefen. Auf dieser Grundlage wird später das Konzept des Konfidenzintervalls für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit entfaltet.

#### ***Kernkompetenzen:***

Schülerinnen und Schüler sollen

- das Verhalten relativer Häufigkeiten bei wachsendem Stichprobenumfang mit Hilfe von Simulationen untersuchen und wesentliche Phänomene beschreiben, wie z.B. die Abnahme der Streuung der relativen Häufigkeit bei wachsendem  $n$  mit  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  und die Besonderheit stochastischer „Konvergenz“ (Vertiefung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen),
- relative Häufigkeiten als Zufallsgrößen interpretieren, mit Hilfe der Binomialverteilung modellieren und exemplarisch beobachtete Gesetzmäßigkeiten auch theoretisch herleiten.
- wissen, dass es für die Inferenzstatistik von zentraler Bedeutung ist, welche Aussagen man über Stichprobenverteilungen in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang machen kann, und dieses Wissen geeignet anwenden.

### **Kompetenz 7 (bivariate Daten):**

*[Hinweis zur Kompetenz 7: Diese ist in einem Teil der Länder in den Curricula der Sekundarstufe I enthalten, in einem Teil der Länder wäre diese Kompetenz neu zu erwerben.]*

#### ***Erläuterungen:***

Schülerinnen und Schüler sind in der Sekundarstufe I dem Funktionsbegriff begegnet und haben gelernt, Zusammenhänge zwischen zwei Größen (etwa unter dem Zuordnungs- oder auch unter dem Kovariationsaspekt) wahrzunehmen. Die Vernetzung der Leitidee funktionaler Zusammenhang und Daten ist in der Sekundarstufe I begonnen worden, indem bei der Behandlung von Funktionen zum Modellieren auch der Vergleich von Modell und Daten thematisiert wurde. In der Sekundarstufe II vertiefen sie im Kontext einer Analyse bivariater numerischer Daten (Daten zu zwei Merkmalen) ihre Fähigkeiten zur Beurteilung von Kovariationen zwischen zwei Größen und lernen den Zusammenhang zwischen zwei Variablen zu modellieren. Dabei kommt es zu Vernetzungen mit der Leitidee Funktionaler Zusammenhang, wenn durch Anpassen von Parametern (unter Einsatz von Software etwa per Schieberegler oder automatisierter Verfahren bei der linearen Regression) Funktionen an Daten in einem Streudiagramm angepasst werden. Schüler lernen dabei, dass die Diskrepanz zwischen Modell und Daten im Residuendiagramm visualisiert werden kann, das eine qualitative Beurteilung der Güte der Anpassung ermöglicht.



**Kernkompetenzen:**

Schülerinnen und Schüler sollen

- wissen, dass für die Analyse bivariater Daten (Daten zu zwei Merkmalen) die graphische Darstellung im Streudiagramm einen zentralen ersten Schritt vor der Anwendung weiterer Verfahren darstellt, um den Typ des Zusammenhangs zu beurteilen.
- zu gegebenen bivariaten Daten (Daten zu zwei Merkmalen) Trends, Strukturen und Besonderheiten im Streudiagramm beschreiben, ggfs. mit Hilfe von Technologie Kurven an Daten anpassen und im Funktionsterm auftauchende Parameter angemessen interpretieren.
- die Güte einer Kurvenanpassung bewerten und dazu z.B. qualitativ das Residuendiagramm *oder* quantitativ das Kriterium der kleinsten Quadrate verwenden.
- die Methoden der Funktionsanpassung, insbesondere der Geradenanpassung und der Korrelation (bei linearen Zusammenhängen) begründet in einfachen Zusammenhängen einsetzen und um die Beschränkungen dieser Methoden wie etwa den Unterschied von Korrelation und Kausalität wissen.

**Erweiterungen:**

Schülerinnen und Schüler sollen

- für nicht-lineare Zusammenhänge Kurven nach Augenmaß unter Zuhilfenahme von Residuendiagrammen anpassen, und nutzen dafür ggfs. verständlich nicht-lineare Regressionsmethoden, wie sie in Software angeboten werden.

**Zusätze**

In den Zusätzen werden drei zentrale Aspekte des Stochastikunterrichts der Sekundarstufe II, die in mehreren der oben genannten Kompetenzen enthalten sind, gebündelt.

**A. Modellieren**

Die Stochastik ist der Inhaltsbereich der Schulmathematik, in dem der Modellierungsgedanke unmittelbar präsent ist.

- Die Analyse von Daten zielt darauf, ein beschreibendes Modell mit den Methoden zu entwickeln, die für univariate Datensätze in der Sekundarstufe I vermittelt wurden und für bivariate Datensätze spätestens in der Sekundarstufe II zu vermitteln sind.
- Für einen Teil der deskriptiv entwickelten Modelle lassen sich in der Sekundarstufe I, und speziell in der Sekundarstufe II wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle finden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule umfasst damit das Arbeiten in Modellen.
- Die beurteilende Statistik als ein Schwerpunkt des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe II stellt schließlich Methoden bereit, um bestehende Modelle zu überprüfen (Testen) oder auch die Entwicklung von Modellen bezogen auf Parameter einer Verteilung zu verbessern (Punktschätzung – Intervallschätzung).

Schülerinnen und Schüler sollen die Modellierung realer Situationen am Ende ihrer Schulzeit in vollem Umfang, d.h. bezogen auf alle drei genannten Aspekte, erfahren haben. Insbesondere sollten Schülerinnen und Schüler erfahren, dass stochastische Problemstellungen stets mit einem Sachkontext in Verbindung stehen und damit die Beschreibung oder Beurteilung von Daten nur in der Verbindung mit dem Sachkontext zielführend ist.

Schließlich sollten Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Entwicklung von beschreibenden Modellen von Daten auch in zunächst nicht genuin stochastischen Problemstellungen

- bei der Mehrzahl der schulrelevanten Modellierungsprobleme einen entscheidenden Modellierungsschritt darstellen und
- eine spezifische, empirisch geprägte Perspektive auf mathematische Objekte, insbesondere auf Funktionen, ermöglichen.

## **B. Formale Strenge**

In der Stochastik sollte konzeptionelles Verstehen der zentralen Ideen eine Priorität vor formaler Strenge eingeräumt werden.

Beispielsweise kann die Simulation helfen, die wesentlichen Konzepte der beurteilenden Statistik, d.h. die Logik beim Bilden eines Konfidenzintervalls oder einer Entscheidung beim Hypothesentest, qualitativ, aber auch propädeutisch quantitativ begreifbar zu machen. Zudem kann Simulation den beschränkten Methodenapparat der Sekundarstufe II öffnen und etwa den Anpassungstest oder den Vergleich zweier Stichproben vorbereitend für Schülerinnen und Schüler zugänglich machen.

Die Stochastik sollte als Theorie der Zufallsphänomene in der Schule unterrichtet werden. Dies kann insbesondere dann erreicht werden, wenn auch die Phänomene geeignet durch Schülerexperimente, Simulationen und eigene Datenerhebungen im Unterricht zur Geltung gebracht werden.

Ebenso sollte etwa die Visualisierung der Formel von Bayes (Baum mit absoluten Häufigkeiten, Einheitsquadrat) die formal strenge Formulierung vorbereiten und kann diese im Regelfall ersetzen.

Damit wird die Formalisierung stochastischer Begriffe und Methoden nicht durchweg obsolet, sollte aber stets als Ergebnis und nicht als Einstieg verstanden werden. Ziel einer solchen Auffassung ist es, dass Schülerinnen und Schüler beispielsweise einen Hypothesentest nicht mechanisch-algorithmisch ausführen, sondern die zugrunde liegende Logik präzise beschreiben können. Eine vorschnelle Formalisierung kann hier wesentliche Einsichten in das stochastische Denken behindern.

## **C. Fehlvorstellungen**

Schülerinnen und Schüler sollen am Ende ihrer Schulzeit begründet Fehlvorstellungen zurückweisen und Fehlinterpretationen entlarven können, die bei stochastischen Fragestellungen leicht zu inkorrekten Schlussfolgerungen verführen.

Im Bereich der Stochastik treten Fehlvorstellungen und Fehlinterpretationen schon auf elementarem Niveau auf. Schüler sollen darauf vorbereitet sein, auf Fehlvorstellungen basierende Argumente in den Medien sowie in Diskussionen zu erkennen, zu entlarven und ihre vermeintliche Verursachung zu identifizieren. Wichtige Fehlvorstellungen sind beispielsweise:

- Das Verwechseln von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit bzw. empirisches Resultat und Modell bzw. Schätzung und Modellwert.
- (als Ergänzung:) Simpsons Paradox und ein fehlendes Bewusstsein der Auswirkung verborgener Drittvariabler.
- Das Verwechseln von bedingendem und bedingtem Ereignis im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten.

- Die Vernachlässigung des Einflusses des Stichprobenumfangs auf das Eintreten seltener Ereignisse (Gesetz der großen Zahlen).
- Der Gamblers Fallacy, d.h. die fehlerhafte Einschätzung der Chance für das Eintreten eines neuen Ergebnisses in einer Folge unabhängig wiederholter Experimente wie z.B. beim wiederholten Münzwurf.

Als weitere, Fehlinterpretationen überwindende Einsichten können folgende Aspekte zählen:

- Das Erkennen fehlender Voraussetzungen beim Anwenden stochastischer Modelle und statistischer Verfahren.
- Das Erkennen problematischer Schlussfolgerungen aus statistischen Graphiken.
- Das Erkennen nicht sachgemäßer Annahmen der Gleichverteilung wie z.B. beim 3-Türen-Problem.
- Das Erkennen falscher Schlussfolgerungen aus Hypothesentests.