

DAS PROJEKT

"CHANCE AND PROBABILITY CONCEPTS"

("CHANCE- UND WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFFE")

D. R. GREEN

übersetzt von Bernd Wollring

*Wie sehen die frühen Vorstellungen von Kindern zur Wahrscheinlichkeit aus, und wie entwickeln sie sich?*

Dieses Projekt wird vom *Social Science Research Council* getragen. Es wurde im November 1978 gestartet und soll drei Jahre Laufzeit haben. Ein Hauptziel ist die Erforschung der Begriffe und Vorstellungen von Zufallsprozessen bei Kindern mit unterschiedlichen Fähigkeiten im Alter von 11 bis 16 Jahren. Untersucht werden soll auch die Fähigkeit, Permutationen, Kombinationen und Anordnungen aufzuzählen. Ferner ist eine Analyse der CSE und GCE O-Level-Mathematikskripten vorgesehen.

Im Laufe der letzten zwei Jahrzehnte wurde das Gebiet "Wahrscheinlichkeit" in das Mathematik-Curriculum eingefügt, aber dies scheint mir eher eine leere Geste als eine klare Strategie zu sein. Daß die grundlegenden Ideen, auf denen das Verstehen der Wahrscheinlichkeit beruht, für alle Schüler von Bedeutung sind, soll hier nicht bestritten werden. Auch Mathematiklehrer und Psychologen weisen ja darauf hin, daß das Erziehungssystem die Wahrscheinlichkeit vernachlässigt hat und fordern, daß dieses korrigiert werde. Zum Beispiel schreibt *E. Fischbein* (1975): "Dem Kind wird beigebracht, daß Erklärungen darin bestehen, Gründe anzugeben, daß eine wissenschaftliche Vorhersage etwas Sicheres sein muß, daß Mehrdeutigkeit und Unsicherheit bei wissenschaftlichem Denken nicht zu akzeptieren sind, und so weiter. Auch wenn dies alles nicht explizit festgestellt wird, so steckt es doch implizit in allem, was in den Schulen gelehrt wird" (Seite 71). Das Übergewicht deterministischer Techniken

in der Schulerziehung ist offensichtlich. Es sieht allerdings nicht so aus, als könnte die in den meisten Lehrtexten verlangte Art mechanischer Wahrscheinlichkeitsberechnungen hier viel helfen. Denn diese gehen meist von einem *a priori* Ansatz aus, wobei die experimentelle Seite viel zu kurz kommt (, wohl um die "reine Mathematik" nicht zu verderben).

Die Ergebnisse der *Piaget'schen* Schule sind zwar im Bereich der Arithmetik allgemein bekannt, aber vermutlich kennen nur wenige Mathematiklehrer das Werk "*The Origin of the Idea of Chance in Children*" (*Piaget* und *Inhelder*, 1975). Es liefert eine sehr nützliche Ausgangsbasis zur Untersuchung von Wahrscheinlichkeitsüberlegungen bei Schülern.

Bei Erwachsenen besteht eine starke Neigung zu der Annahme, daß die noch nicht erwachsenen Kinder diejenigen Vorstellungen und Begriffe von Wahrscheinlichkeit besitzen, die sie, die Erwachsenen, selbst so natürlich finden. Hier kann der Lehrer andere Erfahrungen machen, wenn er sich der Mühe unterzieht, die Behauptungen seiner Schüler zu analysieren. Allerdings ist die Ermittlung dessen, was der Schüler wirklich denkt, ein risikoreiches Geschäft!

Der erste Teil des Projektes "Chance and Probability Concepts" bestand darin, einen Test von etwa dreißig bis vierzig Fragen zu entwickeln und durchzuführen, und dann einen Querschnitt von Schülern zu ihren schriftlichen Antworten zu befragen. Wir wollen hier einige vorläufige Ergebnisse bei dreien von diesen Fragen vorstellen.

#### Frage 1

Eine kleine runde Münze ist auf der einen Seite rot, auf der anderen grün. Die Münze wird hochgeworfen. Welche Seite, die rote oder die grüne, wird vermutlich oben liegen, wenn die Münze hingefallen ist? (Erkläre Deine Antwort!)

#### Typische Antworten

- A: Wendy (11 Jahre, sehr gut): "Die rote Seite wird vermutlich eher oben liegen, wenn man die Münze erst auf die rote Seite legt und dann hochwirft."
- B: Andrew (11 Jahre, sehr gut): "Grün, für Losgehen."
- C: Dawn (12 Jahre, geringe Fähigkeiten): "Rot, weil sie sich dreht, weil es gleich bleibt."
- D: David (11 Jahre, geringe Fähigkeiten): "Dieselbe Chance."
- E: Jane (12 Jahre, sehr gut): "Es gibt eine faire Chance."
- F: Nigel (12 Jahre, Durchschnitt): "Gleich."
- G: Wendy (13 Jahre, gut): "Niemand kann das sicher sagen."
- H: Teresa (14 Jahre, Durchschnitt): "Es hat eine Chance von 1/2, rot oder grün zu werden."
- I: Maria (14 Jahre, überdurchschnittlich): "Sie sind beide gleich möglich."
- J: Jayne (14 Jahre, Durchschnitt): "Weiß man nicht, es kann auf beide Seiten fallen."
- K: David (15 Jahre, unterdurchschnittlich): "Die grüne Seite ist wahrscheinlicher."
- L: Lionel (15 Jahre, unterdurchschnittlich): "Nun, es wird eine 50:50-Chance geben."

Die Beschreibung der Schülerfähigkeiten wurde von ihren Mathematiklehrern oder dem Direktor gegeben. Es mag einen wie ein Schock treffen, daß ein "sehr guter" Schüler (B) sich mit "Grün, für Losgehen" zufriedengibt, wogegen ein Schüler mit "geringen Fähigkeiten" (D), der zufällig denselben Mathematiklehrer hat, die Symmetrie der Situation erkennt.

Die meisten der befragten Elfjährigen neigten dazu, einfach eine Farbe zu nennen, die meisten Fünfzehnjährigen produzierten sich dagegen mit Redewendungen wie "vermutlich gleich". Kann man schließen, daß dies das Vorhandensein eines Wahrscheinlichkeits-

begriffes bei dem älteren Kind, nicht aber bei dem jüngeren zeigt? Die vorliegenden Daten rechtfertigen eine solche Schlußfolgerung kaum. Wir würden wohl eine derartige Folge in der Entwicklung erwarten, aber der Einfluß der Sprache kann hier eine große Rolle spielen. Vielleicht klingt die Frage für die jüngeren Schüler so, daß sie eine Entscheidung verlangt. Vielleicht löst das Schlüsselwort "vermutlich" eine rollenbezogenen gelernte Antwort bei den älteren Schülern aus, die ja "von Wahrscheinlichkeit etwas gelernt" haben, aber deswegen noch nicht wissen müssen, was das bedeutet. Was aber diese begrenzte Untersuchung wirklich zeigt, ist, daß der Mathematiklehrer der secondary school nicht davon ausgehen kann, daß die Gleichwahrscheinlichkeit von "Rot" oder "Grün" hier überhaupt allen Schülern klar ist. Farbenpräferenzen kann man einigermaßen sicher bei, sagen wir, Sechsjährigen feststellen, aber möglicherweise bleiben sie weit länger bestehen. Das starke Interesse daran, was "fair" ist, das man kleinen Kindern zuspricht, scheint hier nicht zu helfen. Das kann natürlich daran liegen, daß "fairness" in der Formulierung der Frage nicht auftritt. (Es wäre interessant, zu sehen, ob eine Beschreibung der Münze als "fair" die Antworten irgendwie ändert.)

Dieselbe Frage wurde Schülern einer ersten Klasse mit unterschiedlichen Fähigkeiten gestellt, ferner wurde eine abgeänderte Frage, bei der "ober gibt es keinen Unterschied" hinzugefügt war, zwei ähnlichen Klassen gestellt. Dies sind die Antworten:

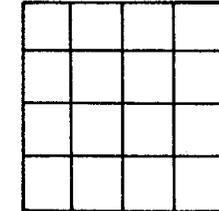
	Originalfrage	geänderte Frage
"Kein Unterschied"	16	17
"Rot"	2	8
"Grün"	7	13
andere Antworten	2	0
	27	38

Anscheinend zeigen viele Schüler auch dann noch eine Präferenz für eine Seite, wenn auf die Gleichheit der Möglichkeiten aus-

drücklich hingewiesen wird.

Frage 2

Das Dach eines kleinen Gartenhäuschens hat 16 quadratische Ziegel wie in dem Bild. Es beginnt zu schneien. Nach einer kurzen Zeit sind insgesamt 16 Schneeflocken auf das Dach gefallen. Zeichne für jede Schneeflocke ein X, wo Du glaubst, daß sie auf das Dach gefallen ist.



Erkläre Deine Antwort!

Typische Antworten waren:

- A: Wendy - eine Zufallsverteilung (Bild 1)
- B: Andrew - eine pro Quadrat (Bild 2)
- C: Dawn - alle am Rand entlang (Bild 3)
- D: David - "Eine pro Quadrat."
- F: Nigel - "Etwa eine pro Quadrat."
- G: Wendy - "Fast unmöglich, das zu sagen."

"ERFOLG" INSGESAMT: 2 oder 3 von 9

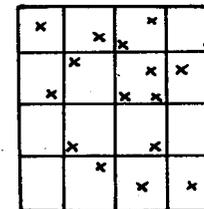


Bild 1

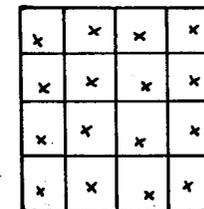


Bild 2

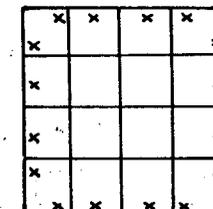


Bild 3

Offensichtlich fühlten sich die Schüler bei der Aufforderung zum Zeichnen dazu gedrängt, die Schneeflocken schön je eine pro Quadrat zu verteilen, aber das mag eher ein Bedürfnis nach symmetrischen Figuren widerspiegeln als die Unkenntnis der zufälligen Verteilung.

Die Frage wurde dann auf eine multiple-choice-Form umgeschrieben und einer Klasse vorgelegt. Die Ergebnisse waren folgende:

Jahr	Zahl der Befragten	Bild 1	Bild 2	Bild 3	andere
1	65	46%	40%	11%	3%
2	43	30%	53%	14%	2%
3	50	12%	54%	26%	8%
4	88	28%	64%	6%	2%
5	42	33%	55%	7%	5%

Es ist schwer, aus diesen Zahlen irgendetwas mit Sicherheit zu folgern. Die "Zufallsverteilung" (Bild 1) wurde bei den Erstkläßlern am meisten bevorzugt (, bevor die Mathematiker sie in die Hände bekamen?). Sicherlich besteht hier Anlaß zum Nachdenken!

Näher am typischen Schulstoff lag folgende

Frage 3

(a) In zwei Taschen liegen je einige weiße und einige schwarze Kugeln.

Tasche S: 1 weiße und 2 schwarze



Tasche T: 5 weiße und 2 schwarze

Hans soll eine Tasche aussuchen und ohne hinzusehen eine Kugel herausnehmen. Hat er eine weiße Kugel gezogen, so gewinnt er einen Preis. Sollte Hans die Tasche S oder die Tasche T wählen? Bei welcher Tasche hat er eine bessere Chance, eine weiße Kugel zu ziehen, oder sind sie gleich?

Andere Teile dieser Frage waren ähnlich formuliert, aber ohne passende Bilder. Dies waren die Tascheninhalte:

(b) Tasche U: 2 weiße und 2 schwarze

Tasche V: 4 weiße und 4 schwarze

(c) Tasche W: 3 weiße und 1 schwarze

Tasche X: 3 weiße und 2 schwarze

(d) Tasche Y: 12 weiße und 4 schwarze

Tasche Z: 20 weiße und 10 schwarze

Die Prozentanteile richtiger Antworten waren folgende:

Jahr	3(a)	3(b)	3(c)	3(d)
1	100%	54%	74%	60%
2	*	65%	81%	42%
3	*	62%	82%	70%
4	95%	66%	86%	70%
5	98%	71%	93%	83%

\* nicht aufgezeichnet

Die Teile (a) und (c) sind beide "Probleme mit einer Veränderlichen"; denn nur die Anzahl einer Farbe variiert. Piaget und Inhelder berichten, daß Antworten auf solche Fragen im Stadium IIa (7 bis 10 Jahre) systematisch richtig sind. Die Teile (b) und (c) sind "Probleme mit zwei Veränderlichen", da die Anzahl bei zwei Farben variiert. Hier ist ein Vergleich von zwei Verhältnissen erforderlich, also ein doppelter Vergleich, von dem Piaget und Inhelder sagen, daß er das Stadium der formalen Operationen (Stadium III) erfordert, obwohl unsystematische empirische Versuche im Stadium IIB (9 bis 12 Jahre) bisweilen korrekte Antworten liefern.

Der sehr hohe Anteil richtiger Antworten bei (a) und (c) und der kleinere Anteil bei (b) waren daher zu erwarten, aber die Ergebnisse bei (d) sind doch überraschend hoch. Prüft man die Erklärungen, die zu den genannten Antworten gegeben werden, so wird deutlich, daß die Schüler wesentlich mehr "intuitiv" als "logisch" vorgehen.

Bei Teil (b) waren typische Gründe für die Wahl einer Tasche:

A: "U, weil weniger schwarze und weiße als in V drin sind."

C: "U, weil man unter weniger Kugeln aussuchen muß."

G: "V, weil man bei U eine 2:1-Chance hat und bei V eine 4:1-Chance."

Die Schüler A und C bevorzugen den einfacheren Fall, weil sie empfinden, daß die kleineren Zahlen einen Vorteil bei den weißen Kugeln bedeuten (, nicht bei den schwarzen!). Der Schüler G ignoriert das Vorhandensein der schwarzen Kugeln überhaupt.

Bei Teil (c) waren typische Antworten:

A: "W, weil da mehr weiße Kugeln drin sind."

C: "W, weil da nicht so viele schwarze Kugeln drin sind."

G: "W, weil man bei X weniger Chancen hat, eine schwarze Kugel zu bekommen."

J: "W, weil die Mehrzahl der Kugeln weiß ist."

Bei Teil (d) waren typische Antworten:

A: "Y, weil es da weniger weiße Kugeln als bei Z gibt."

C: "Y, weil es weniger schwarze gibt."

E: "Y, weil es da ein größeres Verhältnis von weißen zu schwarzen Kugeln gibt."

G: "Y; denn in Tasche Z sind halb so viele schwarze Kugeln wie weiße. In Tasche Y sind es weniger als halb so viel."

J: "Y, weil da ganz viele weiße drin sind nur wenige schwarze."

Dies ist nicht der richtige Zeitpunkt, um auf das Beschreiben von Testergebnissen oder die Interpretation der Ergebnisse näher einzugehen, da das Projekt gerade begonnen hat. Es ist zu hoffen, daß das oben gesagte die Mathematiklehrer dazu bringt, Unterrichtsvorhaben zur Wahrscheinlichkeit mit besonderer Vorsicht zu planen. Weitere Berichte werden rechtzeitig veröffentlicht, und interessierte Leser mögen dem Autor ihre Bemerkungen zukommen lassen.

Angebote zur Mithilfe aus den Schulen in den Midlands oder auch weiter entfernt, mit Testvorschlägen, wären sehr willkommen.

Dankbar möchte der Autor die Mitarbeit mehrerer Schulen erwähnen, die ungenannt bleiben sollen.

#### Quellen

Fischbein, E.: *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*;  
D. Reidel, 1975

Piaget, J., Inhelder, B.: *The Origin of the Idea of Chance in Children*;  
Routledge and Kegan Paul, 1975