TRIFF DEINE WAHL*)

A. G. MUNFORD I. S. RILEY

Übersetzt von Norbert Therstappen

Viele Schüler und Lehrer sind der Meinung, daß es motivierend und weiterbildend sein kann, schwierige Probleme zu lösen. Hier sind zwei solche Probleme. Obwohl sie von sich aus interessant sind, veranschaulichen sie mehrere Punkte von dem, was man gute Unterrichtspraxis nennen könnte.

Das Zwiebelproblem:

Letztes Jahr pflanzte Farmer Davis in seinem Garten 51 Zwiebelpflanzen, wobei er wußte, daß sich diese Menge aus 5o keimfähigen Pflanzen und einer sehr kleinen alten Zwiebel, die seine Frau daruntergeworfen hatten, zusammensetzte. Er konnte diese Pflanze jedoch nicht aussortieren. Bei diesen Voraussetzungen wuchs eine der Zwiebeln nicht. Wir nehmen an, daß die Wahrscheinlichkeit für Wachstum bei einer keimfähigen Pflanze o,9 ist, während die Wachstumswahrscheinlichkeit der alten Zwiebel o,4 beträgt; finde die Wahrscheinlichkeit, daß die ausgebliebene Zwiebel nicht aus der Menge der keimfähigen Pflanzen ist.

Eine Lösung von Professor Ivan Answer:

"Das muß die Bayes Formel sein - hier gibt es keinen Zweifel!"

$$P(\text{alte Zwiebel}\,|\,\text{kein Wachstum})$$

$$= \frac{P(\text{kein Wachstum}\,|\,\text{alt})P(\text{alt})}{P(\text{kein Wachstum}\,|\,\text{alt})P(\text{alt}) + P(\text{kein Wachstum}\,|\,\text{keimf.})P(\text{keimf.})}$$

$$= \frac{o{,}6\ (\frac{1}{51})}{o{,}6\ (\frac{1}{51}) + o{,}1\ (\frac{5o}{51})} = \frac{o{,}6}{o{,}6 + 5{,}o} = o{,}1o7$$

"Nächste Frage"

Eine erwägenswerte Auffassung

Ist diese Lösung richtig? Nein; sie ist jedoch die richtige Lösung eines anderen Problems. Es ist die Antwort auf die Frage:"Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig ausgewählte Zwiebel nicht zur keimfähigen Menge gehört, wenn bei ihr kein Wachstum vorlag? oder Was ist die Wahrscheinlichkeit,

*) Originalartikel in 'TEACHING STATISTICS' (1981) Heft 2, Band 3 'Take Your Pickle'

daß z. B. Zwiebel 23 nicht keimfähig ist, unter der Hypothese, daß sie nicht wuchs?"Im Wesentlichen berücksichtigen wir nur die Bedingungen, die sich auf die eine Zwiebel beziehen, die anderen 5o beeinflussen nicht direkt das Problem.

Wie ist dann das Originalproblem zu lösen? Wir wissen ganz genau, daß eine Zwiebel ausblieb und 5o erfolgreich wuchsen. Die Lösung sollte diese Information berücksichtigen. Also

$$P(\text{nicht aufgehende Zwiebel ist alt}\,|\,\text{genau eine geht nicht auf})$$

$$= \frac{P(\text{nicht aufgehende Zwiebel ist alt } \textit{und} \text{ genau eine geht nicht au:}}{P(\text{genau eine geht nicht auf})}$$

$$= \frac{o{,}9^{5o}o{,}6}{(o{,}9)^{5o}o{,}6 + \binom{5o}{1}o{,}9^{49}o{,}4\cdot 1} = o{,}213$$

Einige Anmerkungen für Lehrer

Der aufgetretene Fehler bestand darin, daß Ivan ein anderes Problem löste und das löste er in der Tat richtig. Dies ist ein üblicher Fehler in vielen Lösungen und zwar einer, der von Schülern sehr schwer zu finden ist. Unser Ratschlag ist es jede Frage sorgfältig zu lesen und wenn möglich eine annehmbare Probe der Antwort zu machen, indem man z.B. die Frageparameter geringfügig verändert oder die Größe der Antwort abschätzt. In unserer Aufgabe würde die Untersuchung von $P(\text{kein Wachstum}\,|\,\text{alt}) = 1$ helfen diese Zusammenhänge zu klären. Die Fragesteller haben natürlich die Pflicht zu versuchen solche Schwierigkeiten zu sehen bevor sie auftreten. Übersieht dieser Fragetyp tatsächlich die Kritik?

Unserer Meinung nach ereignete sich Ivans Fehler in erster Linie wegen seiner Art das Problem anzufassen. Er schritt geradewegs auf eine Anwendung der Bayes Formel zu, was unserer Meinung nach kein gutes Lösungsverfahren ist. Ein besserer Weg bei Aufgaben wie dieser ist es, von der grundlegenden Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit auszugehen und wenn notwendig die Hypothesen der bedingten Wahrscheinlichkeit zu vertauschen. Dies führt, so glauben wir, zu größerem Verständnis und macht es möglich in einigen Fällen unnötige Arbeit oder sogar Fehler zu vermeiden.

Das heißt schreibt man in diesem Fall

P(die ausgebliebene Zwiebel ist alt)

= P(ausgebliebene Zwiebel ist alt|genau eine bleibt aus)

× P(genau eine bleibt aus)

und benutzt direkt die bedingte Wahrscheinlichkeit, wie in der betrachteten Lösung, so erhöht sich die Chance die geplante Aufgabe zu lösen.

<u>Jack Pott's Quiz Show:</u>

Jack Pott hat eine wöchentliche Fernsehschau, in der der Hauptpreis ein Auto im Wert von 6000 Pfund ist. An einem speziellen Abend ist der Finalist Willi Winn, konfrontiert mit drei gleichen Boxen, von der eine die Autoschlüssel enthält. Errät er welche Box die Schlüssel enthält, so gewinnt er den Wagen.

Jack	Welche Box, Willi?
Willi	Box 3 bitte.
Jack	Deine Gewinnchancen sind 1 zu 3, ich gebe dir 2000 Pfund, wenn du auf dein Recht verzichtest die Box zu öffnen.
Willi	Nein Danke.
Publikum	Öffne die Box.
Jack	(Nimmt ein großes Bündel 5 Pfund Noten aus der Tasche) Bis du sicher Willi?
Willi	Ziemlich sicher, danke.
Publikum	Nimm das Geld.
Jack	Bevor du deine Box öffnest Willi, laß uns in eine der anderen sehen. Was ist mit Box 2? (Er öffnet sie - lange Pause) Sie ist....leer.
Publikum	Öffne die Box.
Jack	Nun, Willi, das änderert die Sache. Deine Gewinnchance ist nun 1:2. Ich werde dir 3000 Pfund für deine Box geben.

Was soll Willi tun - hat Jack seine Summe richtig gewählt?

Lösung

Da er noch unter seinem kürzlichen Versagen leidet, fühlt sich Professor Ivan Answer unsicher bei der Lösung des Problems. Er entscheidet daher es seiner Tutorengruppe zur Diskussion vorzulegen.

Die Meinungen seiner Studenten darüber, ob Jack im Recht war oder nicht, waren geteilt. Diejenigen, die zustimmten, argumentierten, daß es genau zwei Boxen auf dem Tisch geben würde, von denen in einer die Schlüssel waren. Für Willi wäre es gleichwahrscheinlich jede von beiden zu ziehen, so daß sie für ihn die Erfolgswahrscheinlichkeit 1:2 ermittelten. Andererseits wußte Willi, daß wenigstens eine der Boxen 1 und 2 leer sein müsse , und das Wissen, daß Box 2 leer ist gibt ihm keine neue Information, so daß seine Chance 1:3 bleibt.

Die richtige Lösung

Die beste Methode, den Disput zu beenden, ist es zum Kern des Problems zu kommen und den Stichprobenraum zu untersuchen. Es ist nicht unmittelbar klar, was der Stichprobenraum ist, aber bei einer Simulation des Spiels müßten wir ihn bestimmen.

(i) Wo waren die Schlüssel

(ii) Willis Wahl

(iii) Jacks Wahl

Wir haben also ein Tripel (i,j,k) zu betrachten. Zum Beispiel bedeutet (2,2,1), Schlüssel in Box 2, Willi wählt 2, Jack öffnet 1. Nicht alle i,j,k Kombinationen haben von o verschiedene Wahrscheinlichkeit, da Jack weder Willis Box öffnen kann noch diejenige, in der die Schlüssel sind (wir müssen annehmen, daß Jack weiß wo die Schlüssel sind und nicht die Box mit den Schlüsseln öffnet, um selbst die Show zu verderben). D.h. Tripel wie (1,2,1),(1,1,1) und (1,2,2) haben die Wahrscheinlichkeit o und müssen nicht als Elemente des Stichprobenraumes aufgefaßt werden. Mögliche Ereignisse sind also solche wie (1,2,3) und (1,1,2).

Benutzt man die Formel

$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) P(C | A \cap B)$

so erhält man

$P\{(1,2,3)\} = 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1$

$P\{(1,1,2)\} = 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/2$ u.s.w.

wobei angenommen wird, daß Jack zufällig wählt und seine Wahl nicht auf eine Box beschränkt ist.

Tripel mit Wahrscheinlichkeit Null und daher ausgeschlossen sind: (1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(1,2,2),(1,3,3),(2,1,1),(2,3,3),(3,1,1), (3,2,2),(1,2,1),(1,3,1),(2,1,2),(2,3,2),(3,1,3),(3,2,3).

Stichprobenpunkte mit Wahrscheinlichkeit 1/9 sind:
(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)
und mit Wahrscheinlichkeit 1/18
(1,1,2),(1,1,3),(2,2,1),(2,2,3),(3,3,1),(3,3,2).
In unserem speziellen Beispiel haben wir beobachtet, daß Willi Box 3 wählte und Jack Box 2, die leer war, d.h. eine Realisation des Ereignisses {(1,3,2),(3,3,2)}.
Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Schlüssel in Box 3 sind, ist daher

$$\frac{P\{(3,3,2)\}}{P\{(1,3,2),(3,3,2)\}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}} = \frac{1}{3} .$$

Willi sollte daher seinen Vorteil aus Jacks Fehlberechnung ziehen und die 3ooo Pfund annehmen. Beachte, daß sich der Stichprobenraum verändert, wenn Jack nicht weiß wo sich die Schlüssel befinden. Tripel wie (1,2,1) und (1,3,1) sind dann mögliche Realisationen. Dabei ergibt sich ein Stichprobenraum mit 18 Elementarereignissen, jedes mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/18. In diesem Fall hat Willi in der Tat die Gewinnchance 1/2.

Einige Anmerkungen für Lehrer

Der Schlüssel (sic) zu dem Problem hier ist die Beantwortung der Frage nach Jacks Wissen über die Lage der Schlüssel - wir nehmen realistischerweise an, daß er diese kennt und daher ist die Antwort 1/3. Dies demonstriert wieder die alte Kamelle, nach der die Antwort von den Problemvoraussetzungen abhängig ist. Wir könnten einen lyrischen Erguß liefern über diesen Punkt im Allgemeinen in der Statistik, aber die Zeit erlaubt das nicht hier. Wir ziehen es vor Wert zu legen auf die oft versäumte richtige Definition und den richtigen Gebrauch des Stichprobenraumes. Allzu oft werden Studenten daduch verunsichert, daß man nicht zurückgeht zu den grundlegenden einfachen Bezeichnungen, sondern es vorzieht in einer ausdrucksvollen Sprache oder in komplizierter Mathematik zu argumentieren. Wie oft haben wir Studenten aufgefordert Diagramme zu zeichnen, um als Antwort nur ein verlegenes Lächeln zu erhalten. Laßt uns die Grundlagen nicht vergessen.

Anmerkung

Das Jack Pott Problem wurde bearbeitet nach einem Brief aus The American Statistician (1975) vol 29, page 67. Die Autoren danken dem Referenten für einige wertvolle Anregungen.