A U F G A B E

HEINZ ALTHOFF, Bielefeld:Beispiel einer Abituraufgabe im Leistungskurs

Fritzchen behauptet: Von allen über den Jahnplatz in Bielefeld fahrenden PKWs beträgt der Anteil p der Volkswagen genau 25 %. Wir wollen diese Hypothese H_0 mit einer Stichprobe vom Umfang n testen; wir bezeichnen die Anzahl der darin befindlichen VWs mit X.

a) Bei $n=100$ wollen wir nach einer der nachfolgenden Entscheidungsregeln vorgehen:

(1) H_0 wird nicht verworfen $\Leftrightarrow 20 \leq X \leq 30$

(2) H_0 wird nicht verworfen $\Leftrightarrow 17 \leq X \leq 33$

Zeichnen Sie für beide Entscheidungsregeln den Graphen der Gütefunktion ins gleiche Koordinatensystem.

b) Geben Sie für beide Entscheidungsregeln P(Fehler 1. Art) sowie P(Fehler 2. Art) für $p=0,2$ bzw. $p=0,3$ an. Wie wirkt sich die Wahl der Entscheidungsregel auf die Wahrscheinlichkeiten für Fehler 1. Art bzw. 2. Art bei diesem Beispiel aus?

c) Bestimmen Sie bei $n=200$ und bei $n=1000$ jeweils die günstigste Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau 5 %.

d) Wie hat sich gegenüber Entscheidungsregel (2) bei $n=100$ (vgl. Aufgabe b) P(Fehler 2. Art) für $p=0,2$ bzw. $p=0,3$ geändert? Verallgemeinern Sie das Ergebnis.

Voraussetzungen:

Mit Stochastik wurde zu Beginn der Jahrgangsstufe 13 begonnen. Das Testen von Hypothesen wurde für binomialverteilte Zufallsgrößen am Ende des 1. Halbjahres behandelt, die Laplaceschen Näherungsformeln folgten im 2. Halbjahr.

Für die Bearbeitung von dieser und zwei weiteren etwa gleichwertigen Aufgaben (eine aus der Analysis, die andere aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung) hatten die Schüler 5 Zeitstunden zur Verfügung. Sie konnten die "Tabellen zur Stochastik" von Barth/Bergold/Haller sowie einen Taschenrechner benutzen.

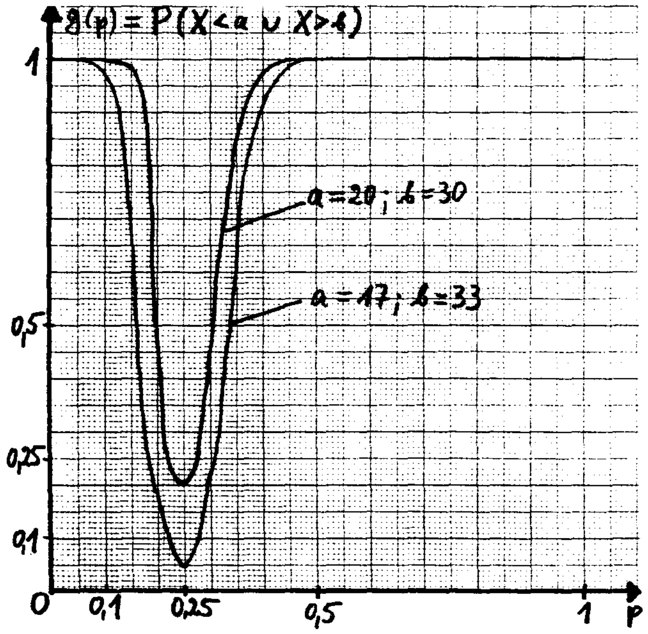
Lösungsvorschlag:

a) Hinweis:

Die Funktionswerte

$$P(X<a \cup X>b) = \sum_{i=0}^{a-1} b(100;p;i)+(1 - \sum_{i=0}^{b} b(100;p;i)) = B(100;p;a-1) + (1-B(100;p;b))$$

können für verschiedene Werte von p mit Hilfe der Tabelle 6 (Binomialverteilung) kumulativ) ermittelt werden.



b) Entscheidungsregel (1):

P(Fehler 1. Art) = $P_{p=0,25}(X<20 \cup X>30)$

$= B(100;0,25;19)+(1-B(100;0,25;30))$

$\approx 0,203$

$P_{p=0,2}(\text{Fehler 2. Art}) = P_{p=0,2}(20\le X\le 30) \approx 0,534$

$P_{p=0,3}(\text{Fehler 2. Art}) = P_{p=0,3}(20\le X\le 30) \approx 0,540$

Entscheidungsregel (2) entsprechend:

P(Fehler 1. Art) $\approx 0,049$

$P_{p=0,2}(\text{Fehler 2. Art}) \approx 0,807$

$P_{p=0,3}(\text{Fehler 2. Art}) \approx 0,778$

Bei Entscheidungsregel (2) ist ein Fehler 1. Art unwahrscheinlicher als bei Entscheidungsregel (1), dafür aber ein Fehler 2. Art in einer größeren Umgebung von $p=0,25$ wesentlich wahrscheinlicher.

c) Geht man davon aus, daß der Graph der Gütefunktion praktisch achsensymmetrisch zur Geraden mit $p=0,25$ ist (jedenfalls für große Werte von n), so ist die

Zahl $b\in\mathbb{N}$ gesucht, für die noch $P(X>b)\le 0,025$ ist (bzw. die größte Zahl $a\in\mathbb{N}$ mit $P(X<a)\le 0,025$). Mit Hilfe der integralen Laplaceschen Näherungsformel ergibt sich:

n=200: $P(X>b)\le 0,025 \iff P(X\le b)\ge 0,975$

$$\iff \phi\left(\frac{b-200\cdot 0,25+0,5}{\sqrt{200\cdot 0,25\cdot 0,75}}\right) \ge 0,975$$

$$\iff \frac{b-49,5}{\sqrt{37,5}} \ge 1,96$$ (nach Tabelle 8 für die Standardnormalverteilung)

$$\iff b \ge 61,5$$

Entsprechend erhält man

$P(X<a)\le 0,025 \iff \dots \iff a\le 38,5$

(Diese Ergebnisse kann man auch mit Tabelle 6 ermitteln, wenn man nicht die Näherungsformel benutzen will.)

Die günstigste Entscheidungsregel lautet für n=200:

H_0 nicht verwerfen $\iff 38\le X\le 62$

n=1000: $P(X>b) \le 0,025 \iff \phi\left(\frac{b-1000\cdot 0,25+0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,25\cdot 0,75}}\right) \ge 0,975$

$\iff b \ge 276,3$

$P(X<a) \le 0,025 \iff \dots \iff a \le 223,7$

Die günstigste Entscheidungsregel lautet für n=1000:

H_0 nicht verwerfen $\iff 223\le X\le 277$

d) n=200: $P_{p=0,2}(\text{Fehler 2. Art}) = B(200;0,2;62)-B(200;0,2;37) \approx 0,665$

$P_{p=0,3}(\text{Fehler 2. Art}) = B(200;0,3;62)-B(200;0,3;37) \approx 0,653$

n=1000: $P_{p=0,2}(\text{Fehler 2. Art}) \approx \phi\left(\frac{277-1000\cdot 0,2+0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right) - \phi\left(\frac{223-200-0,5}{\sqrt{160}}\right)$

$\approx \phi(6,13) - \phi(1,78)$

$\approx 0,038$

$P_{p=0,3}(\text{Fehler 2. Art}) \approx \phi\left(\frac{277-300+0,5}{\sqrt{210}}\right) - \phi\left(\frac{223-300-0,5}{\sqrt{210}}\right)$

$\approx \phi(-1,55) - \phi(-5,35)$

$= (1-\phi(1,55)) - (1-\phi(5,35))$

$\approx 0,061$

Für $p=0,2$ und $p=0,3$ (allgemeiner: in der Nähe von $p=0,25$) verringert sich bei Beibehaltung des 5 % - Signifikanzniveaus die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art mit wachsendem n. Das bedeutet: Je mehr PKWs man auf dem Jahnplatz überprüft, umso wahrscheinlicher ist es, daß man Fritzchens Behauptung zu Recht verwirft, wenn er sich geirrt hat. Weicht p um mehr als etwa 5 % von 25 % ab, so irrt man sich bei einer Stichprobe vom Umfang 1000 nur noch relativ selten.