1982-3

DAS STIRLING'SCHE AUFZEICHNUNGSBLATT* FÜR EXPERIMENTE ZUR WAHRSCHEINLICHKEIT

G. GILES

Übersetzt von Bernd Wollring

Ein neuer Weg zum Aufzeichnen relativer Häufigkeiten bei einfachen Experimenten

Experimente zur Wahrscheinlichkeit innerhalb des Unterrichtes werden von den meisten Mathematiklehrern nach Möglichkeit gemieden. Sie sind, so meint man, mit Organisations- und Kontrollproblemen verbunden, die alle Vorteile überwiegen. Das Lernziel ist meist die Fähigkeit, Prüfungsfragen zur Wahrscheinlichkeit zu beantworten, und praktisches Arbeiten wird aus Zeitmangel als unwesentlicher Luxus angesehen.

Aus meiner Erfahrung heraus bin ich der Ansicht, daß Schüler und Studenten ohne einen angemessenen Hintergrund an praktischer Erfahrung nicht in der Lage sind, ein Verständnis der Wahrscheinlichkeit zu entwickeln. Genau das führte mich dazu, die dreißig Experimente mit Würfelbechern zu entwickeln, die für DIME-Projekte von OLIVER und BOYD veröffentlicht wurden.

Ich wollte Arbeitsmaterial schaffen, mit dem Schüler in Partnerarbeit beide etwa 100 Zufallsexperimente durchführen und jedes Ergebnis auf einem nur punktgroßen Platz notieren können. Dabei dachte ich in erster Linie an Schüler zu Beginn der secondary school (entspricht etwa den Klassen 6 und 7 ; Anm. d. Ü.), daher tritt der Begriff "Wahrscheinlichkeit" nur im Titel auf. Diejenigen, bei denen die Wahrscheinlichkeit "noch nicht dran" ist, können die Versuche als Ratespiele nehmen. Die Tatsache, daß einige in der Klasse meinen, sie könnten "rein zufällige" Ergebnisse vorhersagen, führt, so hoffe ich, zur Diskussion und zur Entwicklung des grundlegenden Begriffs der Wahrscheinlichkeit. Es zeigte sich, daß das Material auch für Studenten und Lehrer wertvoll ist; denn sie fanden bei ihrer

---

* Originaltitel in 'TEACHING STATISTICS'(1979) Heft 3, Band 1 'The Stirling Recording Sheet for Experiments in Probability'

Arbeit damit oft ein neues Verständnis der Wahrscheinlichkeit.

Ein wichtiger Teil dieser Entwicklungsarbeit war die Herstellung eines Aufzeichnungsblattes, das sowohl leicht zu handhaben als auch effektiv zum Gewinnen von Einsicht und Verstehen ist. Das Ergebnis zeigen die Bilder, und der Zweck dieses Artikels ist es, einige Vorteile zu beschreiben, die sein Gebrauch mit sich bringt.

1. Gebrauch des Aufzeichnungsblattes

Um die Folge aus "Gewinn" und "Verlust" aufzuzeichnen, wird vom Startpunkt aus eine durchgehende Linie gezeichnet, am besten mit einem Filzstift. Sie folgt stets einer der dünn gedruckten Linien auf dem Blatt und verläuft stets von oben nach unten. In jedem Kreuzungspunkt kann man eine von zwei möglichen Linien wählen, die Wahl hängt vom Versuchsergebnis ab: "Gewinn" - nach rechts gehen, "Verlust" - nach links gehen. Bild 1 zeigt eine Folge, die mit GGVVG beginnt. Das Originalformat des Blattes ist A5.
Haben die Schüler erst gelernt, das Blatt zu benutzen, so geschieht das Aufzeichnen der Ergebnisse einfach und schnell. Normalerweise arbeiten sie zu zweit, der eine spielt (würfelt oder annliches), der andere zeichnet auf. Selbst wenn das Tempo beim Würfeln und Nennen des Ergebnisses gelegentlich 25 bis 30 Versuche pro Minute erreicht, kann der Aufzeichner mühelos mithalten.

2. Automatisches Mitzählen

Die Anzahl der Versuche wird auf dem Aufzeichnungsblatt automatisch mitgezählt. Hat der Schüler den unteren Rand erreicht, so hat er 50 Versuche aufgezeichnet. Darüber hinaus kann er sofort die Zahl der "Gewinne" unter diesen 50 Versuchen ablesen, von 0 unten links bis 50 unten rechts. Die in Bild 1 aufgezeichneten 50 Versuche enthalten 28 "Gewinne". Mit einer zweiten Linie auf demselben Blatt (möglichst in einer anderen Farbe) erfaßt man dann insgesamt 100 Versuche.

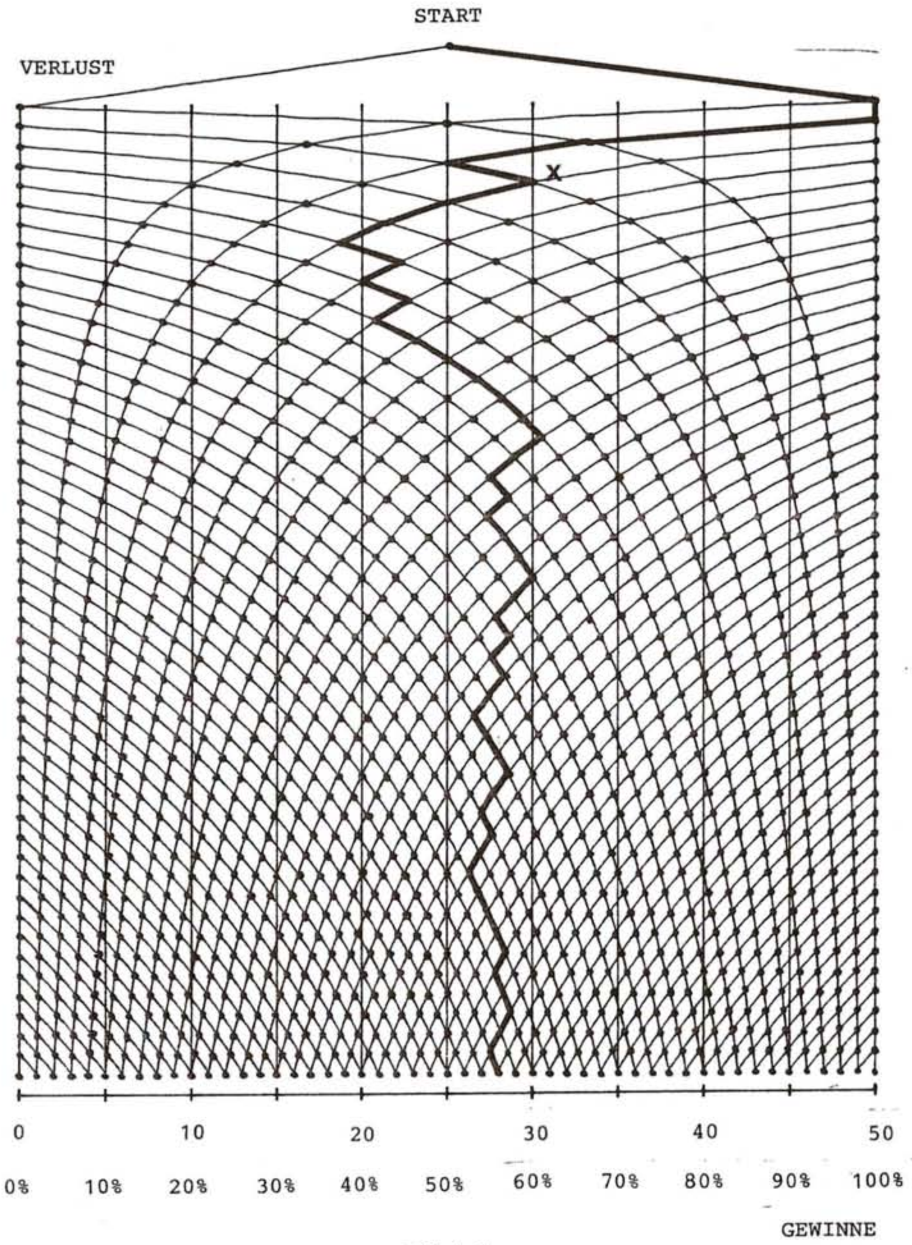

Bild 1

3. Gewinnanteil in Prozent

Zusätzlich kann der Schüler den Anteil der "Gewinne" in Prozent nicht erst nach 50 Versuchen angeben, sondern bereits an jedem Punkt vorher. Er benutzt dazu die senkrechten Linien. In Bild 1 liegt zum Beispiel der mit X bezeichnete Punkt auf der 60%-Linie.

4. Relative Häufigkeit

Des weiteren benötigt man zum Bestimmen relativer Häufigkeiten keine Divisionen. Durch die Geometrie des Bildes kann man das umständliche Ausrechnen umgehen. Denn dies ist dem Schüler bei der Entwicklung seines Wahrscheinlichkeitsbegriffes, die wir uns ja wünschen, meist ein Hindernis.

5. Sichtbare Trends

Ein weiteres wichtiges Ergebnis dieser Aufzeichnungsmethode besteht darin, daß der Trend der Ergebnisse während der Versuchsdurchführung sichtbar wird. Ferner sieht man bei jeder Serie von 50 Versuchen, wie beim Fortführen der Linie nach unten ihre Schwankung nach links oder rechts offensichtlich abnimmt.

6. Gibt es Schnittpunkte?

Wenn eine zweite Linie zur Aufzeichnung der nächsten 50 Versuche gezeichnet wird, kann sowohl bei Erwachsenen als auch bei Kindern eine überraschend hohe emotionale Beteiligung entstehen: Wird die zweite Linie die erste schneiden? Diese Wirkung hatte ich nicht vorhergesehen, aber ohne Zweifel hilft ein solches persönliches Interesse beim Entwickeln eines intuitiven Gefühls für die Grundideen der Wahrscheinlichkeit.

7. Geschätzte Vorhersage

Ganz absichtlich nötigt das Aufzeichnungsblatt, auf dem der Schüler seine Versuchsergebnisse notiert, ihn dazu, vor Beginn

des Versuchs aufzuschreiben, wieviele Gewinne er erwartet. Das führt zu einer höheren emotionalen Beteiligung am Versuch, denn er wünscht ja nun, daß das Ergebnis nahe bei seiner Vorhersage liegt. Bei Arbeitstagungen mit Lehrern erläutere ich diesen Punkt mit einem speziellen Versuch. Dazu dienen zwei Paar Kugeln in einem Zylinder. Ein Versuch besteht darin, den Zylinder zunächst zu schütteln und dann aufrecht auf den Tisch zu stellen. Die Kugeln liegen dann auf dem Zylinderboden entweder in einem Kreuzmuster (Bild 2a) oder paarweise nebeneinander (Bild 2b).

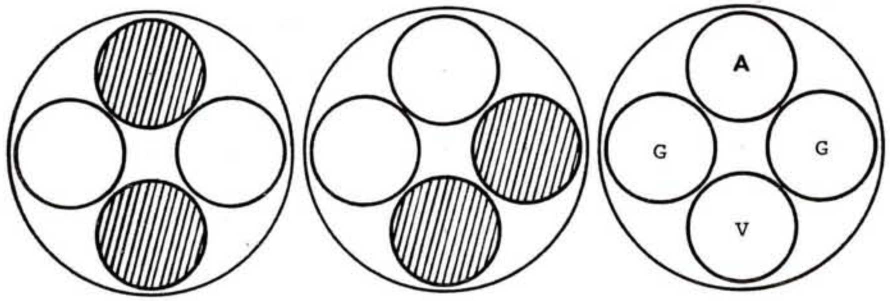

Bild 2a Bild 2b Bild 2c

Man erliegt leicht der Versuchung, diese Ausgänge als gleichwahrscheinlich anzunehmen, und in der Tat vermuten die meisten Schüler, Studenten und Mathematiklehrer vorher, daß sie in 50% der Fälle "gewinnen" werden, das heißt, die Figur aus Bild 2b erreichen. Leider ist aber die theoretische Wahrscheinlichkeit dafür 2/3, wie man mit Bild 2c feststellt. Wenn eine schwarze Kugel in der Lage A liegenbleibt, dann geben zwei von den Lagen, die die andere schwarze Kugel einnehmen kann, einen Gewinn. Beim Durchführen des Versuchs erwarten und wünschen jedoch die meisten Leute, daß die Linie nahe der 50%-Marke auf der Seitenmitte herauskommt. Zeigt sie aber die Neigung, nach rechts auszuwandern, so kann das zu deutlicher Verwirrung führen, besonders wenn dann die zweite Linie die Neigung der ersten bestätigt. Man hat mir vorgeworfen, gezinktes Material zu verwenden, und auf einer Arbeitstagung in Australien hörte ich, wie ein Lehrer sich bei seinem Partner beklagte, "er habe jedes Vertrauen in die Gesetze der Wahrscheinlichkeit verloren". Natürlich gab es auch andere Lehrer, die diese Diskrepanz offensichtlich ohne Verwirrung akzeptieren, was zu der wichtigen Frage führt : Wann sollte man beginnen, seine Vorhersage (Schätzung) zu überdenken ?

8. Konstruktion des Aufzeichnungsblattes

Betrachten wir nun Zusammenhänge zwischen der Konstruktion des Aufzeichnungsblattes und anderen mathematischen Objekten auf verschiedenen Ebenen. Als erstes sollte man bemerken, daß jede Zeile der Kreuzungspunkte die Breite des Blattes in gleiche Stücke teilt. So liegt zum Beispiel der Punkt X in Bild 1 auf dem Punkt 3/5 der Horizontalen und daher auf der 60%-Vertikalen. Dreht man das Bild um 90 Grad nach links, (was wohl für einige Aufzeichnungszwecke von Vorteil ist), so haben die Kurven die Form $y(x) = k/x$ und $y(x) = h - k/x$.

9. Pascal'sches Dreieck

Kehren wir zu dem Punkt X in Bild 1 zurück, so sehen wir, daß er eine Situation mit fünf Versuchen beschreibt, von denen drei "Gewinne" sind. Wir können fragen, auf wieviele Arten diese Position zu erreichen ist. Das läßt sich zum Beispiel durch Betrachten verschiedener Versuchsergebnisse ermitteln: GVGVG, VVGGG, VGGGV und so weiter. Oder wir betrachten die Zahl aller verschiedenen Wege vom Startpunkt bis zum Punkt X. In jedem Fall erhalten wir 10 als Antwort. Wenn wir die entsprechenden Zahlen für die anderen Punkte auf derselben Höhe bestimmen, so erhalten wir die Binomialkoeffizienten 1; 5; 10; 10; 5; 1, die bei der Entwicklung von $(x+y)^5$ auftreten.

10. Binomialkoeffizienten

Ganz natürliches Weiterdenken in dieser Richtung führt zu Fragen wie der folgenden: "Wieviele Wege gibt es vom Start bis zur Mitte der untersten Zeile?" Das Pascal'sche Dreieck Zeile für Zeile bis unten hin zu entwickeln, wäre äußerst mühsam, hier ist jedoch die Gelegenheit vorbereitet, für die Binomialkoeffizienten die Formel zu nennen oder zu entwickeln, die zu

folgendem Ergebnis führt:

$$\frac{50 \cdot 49 \cdot \text{——} \cdot 27 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot \text{——} \cdot 24 \cdot 25}$$

Nun kann jeder sorgfältige und unternehmungslustige Schüler mit einem Taschenrechner und hinreichend Zeit und Interesse herausfinden, daß die Antwort rund 126'000'000'000'000 ist. Auf diese Art kann die Beziehung verschiedener mathematischer Aspekte zu einem gewöhnlichen Aufzeichnungsblatt, das Schüler beim Experimentieren verwenden, und zu Fragen wie: "Wieviele Wege bis X?" diese Mathematik für Studenten jeden Alters mit Sicherheit zugänglicher und bedeutungsreicher machen.

11. Wahrscheinlichkeit bei $p = 1/2$

In dem speziellen Fall, da "Gewinn" und "Verlust" gleichwahrscheinlich sind, folgt, daß alle Wege, sagen wir bis auf die Höhe von X, gleichwahrscheinlich sind. Wir halten fest, daß die Gesamtzahl aller Möglichkeiten (Wege) für die ersten fünf Versuche gleich der Summe der Zahlen in der fünften Zeile des Pascal'schen Dreiecks ist, also 2^5 oder 32. Die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Weg bis X ist also 10 zu 32, oder 0.3125. Betrachten wir nun alle Wege bis hinunter zur untersten Zeile des Blattes, so erhalten wir die Gesamtzahl von 2^{50}, näherungsweise 1'126'000'000'000'000, und es folgt fast sofort, daß man bei einem Versuch mit $p = 0{,}5$ etwa die Hälfte der aufgezeichneten Zick-Zack-Linien auf der untersten Linie im Bereich von 23 bis 27 "Gewinne" (einschließlich) erwarten sollte. Die Wahrscheinlichkeit, ins Zentrum zu treffen, ist etwa 0,1.

12. Vertrauensbereiche

Im wesentlichen liefert die Diskussion oben eine einfache Einführung in das schwierige Gebiet der Vertrauensbereiche (Konfidenzbereiche). Für Unterrichtszwecke mag es angemessen sein, 90%-Vertrauensbereiche zu wählen. Diese kann man auf dem Auf-

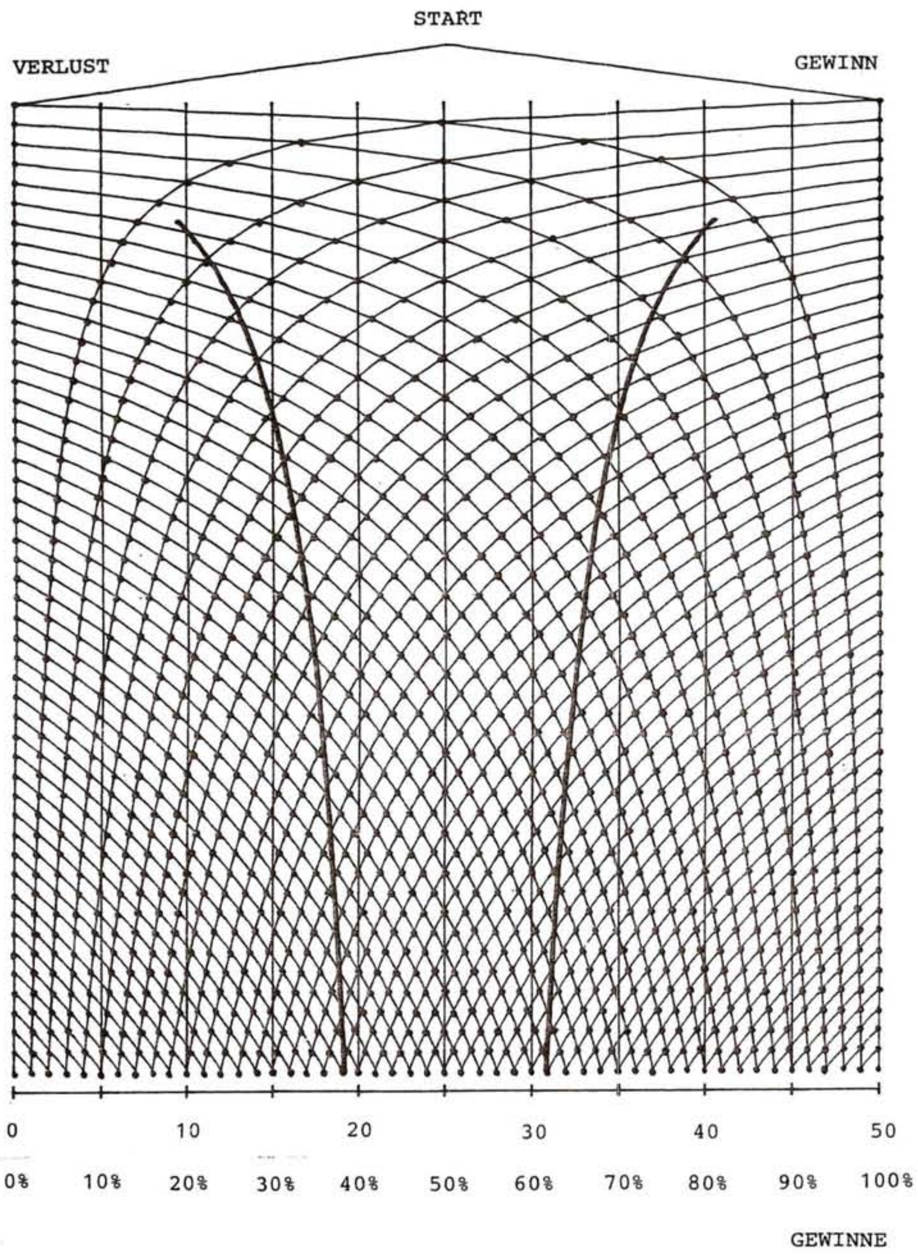

Bild 3

zeichnungsblatt darstellen (siehe Bild 3), und zwar nicht nur als Bereich auf der untersten Linie, sondern mit zwei Kurven, zwischen denen man auf jeder Höhe 90% der Zick-Zack-Linien erwartet. Aus der Form dieser Kurven wird klar, daß man das Versuchsergebnis um so näher bei dem theoretischen Wert der Wahrscheinlichkeit erwarten kann, je mehr Versuche man durchführt.

13. Verteilung der Mittelwerte

Der Probability Kit (Experimentierkasten zur Wahrscheinlichkeit, Anm. d. Ü.) dient dazu, daß gleichzeitig mehrere Schüler in Paaren an verschiedenen Versuchen arbeiten können. Dadurch hat man auch Vorteile beim Experimentieren mit der ganzen Klasse. Zunächst kann man, wie oben, nach Vertrauensbereichen fragen. Als zweites kann man den Mittelwert für die Klasse bestimmen. Bei einer Arbeitstagung, bei der ich den Versuch aus Punkt 7 benutzte, wurde behauptet, die mittlere Anzahl der "Gewinne" bei 50 Versuchen sei 33,33. Daraufhin konnte ich fragen, welche "Genauigkeit" von diesem Mittelwert zu erwarten sei, wenn man die Zahl der Teilnehmer bedenkt. Wenn eine Tagungsgruppe 40 Teilnehmer hat, und jeder zweimal 50 Versuche aufzeichnet, in welchem Bereich sollte man dann den Gruppen-Mittelwert erwarten?

14. Zehn Gewinne nacheinander

Ein einfacher und wichtiger Gesichtspunkt dieser Aufzeichnungsmethode, der bislang nicht diskutiert wurde, betrifft die Reihenfolge, in der die Ergebnisse auftreten. Ein Vorteil hierbei ist, daß man die Klasse zum Beispiel fragen kann, ob jemand zehn aufeinanderfolgende "Gewinne" aufgezeichnet hat. Das ist sehr leicht festzustellen, wogegen übliche Aufzeichnungsmethoden diese Information nicht so leicht hergeben. Man kann auch fragen : "Wie oft sind zehn aufeinanderfolgende "Gewinne" bei einer Klasse dieser Größe zu erwarten ?" Hier ist wieder eine Gelegenheit, weiterführende Probleme zur Wahrscheinlichkeit zu diskutieren.

15. Unabhängige Ereignisse

Noch ein Vorteil trat auf der oben genannten Arbeitstagung unerwartet zutage. Ein enttäuschter Student beklagte sich, der Grund dafür, daß er zu viele "Gewinne" erhielte, läge darin, daß der Zylinder zu eng sei, und die Kugeln nicht leicht genug aneinander vorbeikämen. "Das bedeutet" , sagte er, "daß auf einen "Gewinn" eher ein "Gewinn" folgt." Und deshalb erhielte er zu viele "Gewinne". Die naheliegende Entgegnung war die Frage, ob er auch herausgefunden hätte, daß auf einen "Verlust" eher ein "Verlust" folgt. Ein Blick auf sein Blatt zeigte ihm, daß das nicht der Fall war, und er sah ein, daß er diese Behauptung nicht aufrecht erhalten konnte.

Dieser Artikel basiert auf Material aus dem Abschlußbericht eines Forschungsprojektes, das vom Schottischen Erziehungsministerium (Scottish Education Department) getragen wurde: School Mathematics Under Examination: Some factors affecting the learning of mathematics

Quelle

1. Probability Kit No. 1, Oliver & Boyd, ISBN 0 05 003050, £ 7.50