der Schule, Heft 2, Band 4 (1984)

VOM PROBLEM DES CHEVALIER DE MERE ZUR POISSON-VERTEILUNG

von Hans G. Schönwald

Das Problem des Chevalier de Méré

Im 17. Jahrhundert spielte man - falls man zum Adel gehörte - zur Unterhaltung in damaligen Salons folgendes Würfelspiel: Man würfelte mit einem Würfel viermal und hatte gewonnen, wenn dabei keine Sechs fiel. Antoine Gombauld Chevalier de Méré (1607 - 1685) führte einen solchen Spielsalon. Zur Geschäftsbelebung dachte er sich ein ähnliches, aber komplizierteres und damit spannenderes Spiel aus: Man würfelt mit zwei Würfeln 24mal und gewinnt, wenn dabei keine Pasch-Sechs fällt. Leider wurde das Spiel ein Zuschußgeschäft für ihn, und deshalb beschwerte er sich bei Blaise Pascal (1623 - 1662) über die Mathematik. Denn die Wahrscheinlichkeiten konnten sich nicht verändert haben, weil die Versechsfachung der theoretisch-möglichen Ereignisse (statt 1,2,...,6 nun 11,12,...,16,21 ...,66) durch die Versechsfachung der Würfe (statt 4 nun 24) ausgeglichen wurde. Und doch war das selbsterfundene Spiel ein Zuschuß - und das allgemein übliche ein Gewinngeschäft für die Bank.

Der Erwartungswert $\overline{X}$ ist jeweils $\frac{2}{3}$

Um dies Problem zu durchschauen, setzen wir unsere genaueren, Fehler suchenden Überlegungen bei der Méré'schen Begründung an. Zweifelsohne gilt $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$. Aber was bedeuten diese Brüche? $\frac{1}{6}$ ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs, $\frac{1}{36}$ die für eine Pasch-Sechs. Wenn ich nun 1000000 mal würfle, werde ich 1000000:6 mal eine Sechs werfen. Wenn ich 250000 mal 4 Würfel werfe, werden ebenfalls 1000000:6 Sechsen insgesamt fallen. Also werde ich pro Spiel durchschnittlich

$$\frac{1000000:6}{250000} = \frac{2}{3}$$

Sechsen erwarten dürfen. Wenn ich entsprechend 1000000 mal mit zwei Würfeln würfle, werde ich 1000000:36 mal eine Pasch-Sechs werden. Wenn ich 250000:6 mal 4·6 Zwei-Würfel werfe, werden ebenfalls 1000000:36 Pasch-Sechsen fallen. Also werde ich pro Spiel durchschnittlich

$$\frac{1000000:36}{250000:6} = \frac{2}{3}$$

Pasch-Sechsen erwarten dürfen. Dieses Verhältnis von Anzahl des Auftretens des besonderen Ereignisses zur Anzahl aller Durchführungen nennt man Erwartungswert $\overline{X}$ für die Anzahl X des Auftretens des besonderen Ereignisses.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X

Zur Lösung des Méré'schen Problems ist es nicht notwendig, diese Verteilungen vollständig zu kennen, jedoch zum Verstehen der Lösung hilfreich. Mathematiker würden hier, wenn sie die Lösung noch nicht kennen, zur Erhellung der Situation diese Verteilungen zu finden versuchen. Die Verteilungen sind algebraisch bekannt und mit Taschenrechnern leicht numerisch übersetzbar.

$$P_{einfach}\,(X = k)\ D= \binom{4}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

$$P_{doppelt}\,(X = k)\ = \binom{24}{k} \left(\frac{1}{36}\right)^k \left(\frac{35}{36}\right)^{24-k}$$

k	0	1	2	3	4	5	...
$P_{einf.}$	48,2 %	38,6%	11,6%	1,5%	0,1%		
$P_{dopp.}$	50,86%	34,88%	11,46%	2,40%	0,36%	0,04%	...

Führt man diese Überlegungen im Unterricht durch, können die Schüler als Hausaufgabe die Erwartungswerte $\overline{X} = \frac{2}{3}$ hieran bestätigen.

Der Fehler des Herrn von Méré

Chevalier de Méré hat die Erwartungswerte $\overline{X}$ betrachtet - diese sind gleich - anstelle der Wahrscheinlichkeiten P (X=0) - und diese differieren ein wenig und liegen zudem auf verschiedenen Seiten der 50 %-Marke. Hätten sie auf der gleichen Seite gelegen, hätte Méré seinen Fehler vielleicht gar nicht bemerkt. Der Gegebenheit $\overline{X} = \frac{2}{3}$ entsprechend, hätte er folgendes Spiel anbieten können: Die Bank erhält bei jeder geworfenen Sechs bzw. Pasch-Sechs einen Einsatzbetrag und sie zahlt den doppelten Einsatzbetrag aus, falls bei einem Spiel keine Sechs bzw. Pasch-Sechs fällt. Bei diesem Nullsummen-Spiel würde die Bank leer ausgehen, aber auch nichts zulegen müssen. Will man dies im Unterricht behandeln, so können Schüler ein solches Spiel als Hausaufgabe zu konstruieren versuchen (und evtl. "praktisch" austesten). Dem tieferen Verständnis des Méré'schen Fehlers dient auch folgende Überlegung: Ohne die Verteilungen zu kennen, können wir uns an deren Schema den Kern unserer Problemlösung veranschaulichen. Bei konstantem Erwartungswert = Mittelwert muß, wenn sich die Gewichte = Wahrscheinlichkeiten etwas nach rechts verlagern, auch die linke Seite P (X=0) zum Ausgleich größer werden. Anschaulich steht hinter dieser Sprechweise ein Waagebalken, der bei $X=\frac{2}{3}$ gelagert ist.

Eine Verallgemeinerung

Verallgemeinerungen zu suchen, ist einer der wichtigsten mathematischen Heurismen. Deshalb sollten Schüler, wenn immer möglich, Beispiele solchen Suchens kennenlernen. Hier bietet es sich an, noch einmal zu versechsfachen, etc. Wir spielen also 144 mal mit 3 Würfeln, und allgemein $4\cdot 6^m$ mal mit m+1 Würfeln. Die Méré-sche Neuerung ist dann der Fall m=1, das ursprüngliche Spiel der Fall m=0. Die Erwartungswerte sind $\overline{X} = 4\cdot 6^m : 6^{m+1} = \frac{2}{3}$, die Verteilungen

$$P_m(X=k) = \binom{4\cdot 6^m}{k}\left(\frac{1}{6^{m+1}}\right)^k \left(1-\frac{1}{6^{m+1}}\right)^{4\cdot 6^m - k}$$

Für die Chancen der Spieler P (X=0) gilt P_0 = 48,23%, P_1 = 50,86 % (Méré), P_2 = 51,26 %, P_3 = 51,33 %, P_4 = 51,34 = P_5 = ... Auch für größere k läuft P_m (X=k) gegen einen Grenzwert. Dies vermutet man, wenn man einige Werte numerisch berechnet. Wir wollen versuchen - ein ebenfalls in der Mathematik üblicher Weg - dies algebraisch zu beweisen.

Als erstes fällt auf, daß der Exponent k zweimal auftaucht, und zwar mit verwandten Basen.

$$P_m(X=k) = \binom{4\cdot 6^m}{k}\left(\frac{\frac{1}{6^{m+1}}}{1-\frac{1}{6^{m+1}}}\right)^k\left(1-\frac{1}{6^{m+1}}\right)^{4\cdot 6^m}$$

$$= \binom{4\cdot 6^m}{k}\left(\frac{1}{6^{m+1}-1}\right)^k\left(1-\frac{1}{6^{m+1}}\right)^{4\cdot 6^m}$$

Die Anzahl k als Anzahl von Faktoren taucht noch einmal auf, und zwar in dem Binomialkoeffizienten. Außerdem sind dessen Zählerfaktoren den Nennern der Potenz verwandt.

$$= \frac{1}{k!}\cdot\frac{(4\cdot 6^m)(4\cdot 6^m-1)(4\cdot 6^m-2)\cdot\ldots\cdot(4\cdot 6^m-k+1)}{(6^{m+1}-1)(6^{m+1}-1)(6^{m+1}-1)\cdot\ldots(6^{m+1}-1)}\cdot\left(1-\frac{1}{6^{m+1}}\right)^{4\cdot 6^m}$$

Da wir uns für große m interessieren, ist, falls k nicht so sehr groß wird,

$$\frac{4\cdot 6^m - i}{6^{m+1}-1} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 6^{m+1}-i}{6^{m+1}-1} \approx \frac{2}{3}$$

Beim hinteren Faktor sehen wir die algebraische Verwandtschaft mit der Näherung für die Eulersche Zahl e.

$$\left(1-\frac{1}{6^{m+1}}\right)^{4\cdot 6^m} = \left(\left(1-\frac{1}{6^{m+1}}\right)^{6^{m+1}}\right)^{\frac{2}{3}} \xrightarrow[m\to\infty]{} e^{-\frac{2}{3}}$$

Also insgesamt:

$$P_m(X=k) \approx \frac{1}{k!}\left(\frac{2}{3}\right)^k e^{-\frac{2}{3}}$$

Dabei sollte $m \to \infty$ und $k \ll 6^m$ sein. Obige Näherung ist also Grenzwert bei jedem (festen) k für $m \to \infty$.

Diese Grenz-Verteilung nennt man eine Poisson-Verteilung, benannt nach Siméon Denis Poisson (1781 - 1840). Entsprechend strebt jede Binomialverteilung, wenn man den Erwartungswert X festhält und die Anzahl X_{max} immer weiter erhöht (und damit zwangsläufig die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereignis erniedrigt), gegen eine Poisson-Verteilung P (X=k) = $\bar{x}^k e^{-\bar{x}}/k!$.

Literatur:

Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, in: Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, hrsg. v. E.Zermelo, Berlin 1932, Nachdruck Hildesheim 1962 (die hier zugrunde liegende Notiz steht auf S. 359).

Adresse des Autors: StR Dr. Hans G. Schönwald, Ostlandstr. 19, 5900 Siegen-Eisern.