DIE BINOMIALVERTEILUNG UND DER ANPASSUNGSTEST

nach P. J. BUTT, City of London School
Originaltitel in 'Teaching Statistics' Vol. 6.(1984), Nr. 2:
The Binomial Distribution and the Goodness of Fit Test
Übersetzung: G. Scheu

Anlaß der folgenden Ideen ist der Artikel "Was geschieht in Ihrem Klassenzimmer?" ("What is happening in your classroom?" in Teaching Statistics, Mai 1983) und die Hoffnung, daß weitere Kollegen die Ideen vertiefen und erweitern.

Die Mikrocomputer versetzen uns in die Lage die Frage "Was geschieht wenn?" nicht nur zu stellen, sondern sie sogar auch beantworten zu können.

Bei der Einführung der Binomialverteilung und der Diskussion der notwendigen Bedingungen fragte ich mich dieses Jahr, welche Verteilung entstehen würde, wenn einige der Bedingungen nicht erfüllt wären. Speziell die folgenden Bedingungen:

a. wenn die Zufallsvariablen nicht die gleiche Wahrscheinlichkeit hätten,
b. wenn die Zufallsvariablen nicht unabhängig wären.

Kurz danach las ich den Artikel von C. R. du Feu in Teaching Statistics und beschloß seinem Vorschlag entsprechend das Testen von Hypothesen viel früher in meinem Unterricht einzuführen. Damit erhielt ich folgenden Unterrichtsablauf:

1. Einführung der Binomialverteilung an Hand von praktischen Beispielen. Diskussion der Voraussetzungen der Binomialverteilung B(n,p).
2. Einführung des Testens von Hypothesen an Hand des χ^2-Anpassungstests. Anwendung des Tests unter anderem bei Beispielen aus Punkt 1..
3. Herleitung des Erwartungswerts (np) und der Varianz (npq) einer Binomialverteilung. Anwendung auf Beispiele aus Punkt 2..

Eines der in Punkt 1. durchgeführten Experimente bestand darin, wiederholt 6 Streichhölzer fallen zu lassen. Der Kopf der Streichhölzer war entfernt und eine Seite jedes Streichholzes bemalt worden. Nach jedem Wurf wurde die Anzahl der bemalten Seiten, die nach oben lagen, gezählt, d.h. es wurde insgesamt eine Stichprobe aus einer B(6,1/4) Verteilung gewonnen.

Diese Experimente wurden auch auf einem Computer durch Erzeugung von Zufallszahlen aus der Menge $\{0,1,2,3\}$ simuliert. Dabei wurde gezählt, wie oft die Ziffer 0 in jeder Stichprobe vom Umfang 6 vorkam.

Bei der Diskussion des Hypothesentests und des χ^2-Anpassungstests für die Simulation der Nullhypothese wurde vorausgesetzt, daß der Computer Ergebnisse aus einer B(6,1/4) Verteilung erzeugt. Die Nullhypothese wurde bei der Häufigkeitsverteilung, die ich vorgab, angenommen. Dann wurde der Computer benutzt, um andere Verteilungen zu erhalten,

a. wenn die Bernoulli-Versuche nicht die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Dies wurde dadurch simuliert, daß beim ersten Bernoulli-Versuch die Zahlen 0 oder 1 als Erfolg gezählt wurden und bei den restlichen fünf nur die Zahl 0. Eine solche Verteilung ist in Tabelle 1 dargestellt.
b. wenn die Bernoulli-Versuche nicht unabhängig sind. Dies wurde dadurch simuliert, daß eine Zahl nicht gezählt wurde, wenn sie gleich der vorhergehenden war, z.B. ergibt die Folge 3,1,1,3,0,0,0,2,0 eine Stichprobe vom Umfang 6 mit der Häufigkeit 2. Eine solche Verteilung ist in Tabelle 2 dargestellt.

Die Nullhypothese wurde auf dem Signifikanzniveau von 5 % für diese zwei Beispiele abgelehnt.

Tabelle 1.

Die Bernoulli-Versuche haben nicht die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit

Anzahl der obenliegenden markierten Seiten	0	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	495	1326	1327	705	202	39	2

Nullhypothese H_o: Der Computer simuliert die Binomialverteilung B(6,1/4).
$\chi^2 = 206.5$
Die Nullhypothese H_o wurde bei dem Signifikanzniveau von 5 % Abweichung abgelehnt.

Tabelle 2.

Die Bernoulli-Versuche sind nicht unabhängig

Anzahl der obenliegenden markierten Seiten	0	1	2	3	4	5	6
	421	1626	1673	376	0	0	0

Nullhypothese H_o: Der Computer simuliert die Binomialverteilung B(6,1/4).
$\chi^2 = 525.9$
Die Nullhypothese H_o wurde bei dem Signifikanzniveau von 5 % Abweichung abgelehnt.

Nachdem wir den Erwartungswert einer Binomialverteilung hergeleitet hatten, beendeten wir die Überprüfung der Verteilungen in den Tabellen 1 und 2, um zu sehen, ob sie mit einer Binomialverteilung B(6,p) verträglich waren, wobei die Wahrscheinlichkeit p gleich dem arithmetischen Mittel gesetzt wurde.

Aus der Tabelle 1 folgt:

Arithmetisches Mittel = 1.736, daraus folgt p = 0.2893.
H_o: Der Simulation liegt die Binomialverteilung B(6,0.2893) zugrunde. $\chi^2 = 4.70$, d.h. die Nullhypothese H_o wurde akzeptiert.

(Bei diesem Beispiel wurde die Nullhypothese bei 25 von 100 Verteilungen akzeptiert. Es gab keine nachweisbare Beziehung zwischen dem ursprünglichen und dem zweiten χ^2 Wert oder dem geschätzten Wert für die Wahrscheinlichkeit p.)

Aus der Tabelle 2 folgt:

Arithmetisches Mittel = 1.489, daraus folgt p = 0.2482.
H_o: Der Simulation liegt eine Binomialverteilung B(6,0.2482) zugrunde. χ^2 = 529, d.h. die Nullhypothese H_o wurde nicht akzeptiert.

Bei diesem Vorgehen im Unterricht und der Anwendung dieser Beispiele merkte ich, daß meine Schüler erkannten, daß in unseren Lehrplänen eine Unterrichtseinheit auf der anderen aufgebaut ist.

Sie
- benutzten den χ^2-Anpassungstest für Daten, von denen bekannt war, daß sie unter der Nullhypothese erzeugt waren oder nicht.
- überarbeiteten frühere Lerneinheiten, ohne dies als gewollt zu empfinden.
- benutzten einen hergeleiteten Wert, um einen Parameter zu schätzen.
- benutzen den χ^2-Anpassungstest mit einem Freiheitsgrad weniger, da ein Parameter geschätzt wurde.
- stießen beim Hypothesentesten auf ein Problem, als sie eine Nullhypothese aufgrund des zahlenmäßigen Ergebnisses akzeptierten, obwohl sie wußten, daß die Nullhypothese nicht wahr war.

Meine ursprüngliche Frage, welche Art von Verteilungen in den beiden Tabellen angegeben sind, ist noch zu beantworten.

Der Grund weshalb ich meine Schüler nicht die ursprünglichen Daten überprüfen ließ, die wir beim Versuch mit den 6 Streichhölzern erhielten war, daß die Nullhypothese sogar bei einem Signifikanzniveau von 0.01 % von ihnen nicht akzeptiert wurde. Ich fürchtete, daß sie dies zu diesem Zeitpunkt im Unterricht zu sehr verunsichert hätte.

Streichhölzer sind nicht das, was sie bisher
waren oder das, was wir denken was sie sind!