DAS GALTON-BRETT

Bericht aus der Unterrichtspraxis über einen direkten Einstieg in die Stochastik in der Sekundarstufe II

von I. KLEMISCH, Helmholtz-Gymnasium, 4800 Bielefeld 1

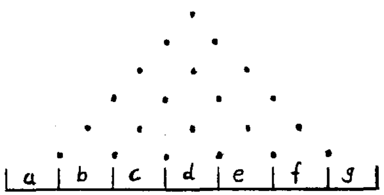
Vorbemerkungen

Ziel der von mir in mehreren Kursen erprobten Einführung in die Stochastik anhand theoretischer Überlegungen am Galton-Brett ist es, die Schüler der Sekundarstufe II, die (zur Zeit noch) sehr unterschiedliche, oft äußerst geringe Vorkenntnisse besitzen, gleich zu Beginn mit einer hinreichend komplexen Situation zu konfrontieren, die divergentes Denken zuläßt und zum Erschließen möglichst vieler Bereiche der Stochastik beiträgt. Wichtig ist mir in diesem Zusammenhang auch der Aspekt, nicht durch zu banale Einstiegsbeispiele zu unterfordern; die Gefahr ist dann groß, daß Schüler den Punkt verpassen, an dem der Bereich des Elementaren verlassen wird.

Es ist zu hoffen, daß - wenn die neuen Richtlinien für die Sekundarstufe I in NRW in vollem Umfang erfüllt werden - in (möglichst naher) Zukunft ein Einstieg in die Stochastik der Sekundarstufe II auch auf höherem Niveau erfolgen kann. Mein Vorschlag wird sich dann vielleicht für eine Wiederholung stochastischer Grundbegriffe aus der Sekundarstufe I eignen.
Im übrigen sei für den Unterricht in der Sekundarstufe I auf Jäger/Schupp ([1] , S.24 ff.) hingewiesen, wo man eine ausführliche didaktische Analyse der Einsatzmöglichkeiten des Galton-Brettes in der Sekundarstufe I findet.

Die Ausgangssituation

Den Schülern (eines Grund- oder Leistungskurses 12.2 oder 13.1) wird zu Beginn der ersten Unterrichtsstunde des Gebietes Stochastik das Prinzip des Galton-Brettes mit Hilfe einer Tafelskizze oder einer OH-Folie erläutert. Sie werden aufgefordert, sich in die Lage eines Glücksspielers zu versetzen, der auf eines der sieben Auffanggefäße wetten darf und sollen ihre Entscheidung



mit ausführlicher Begründung vortragen und im Kurs diskutieren. Das "Kreidemodell" setze ich hier bewußt ein, damit die Schüler völlig frei (und offen für "Irrwege") an das Problem herangehen können und nicht durch die optische Vorgabe zu schnell an die Binomialverteilung herangeführt werden. Irrtümer sind hier wie an vielen anderen Stellen des Mathematikunterrichts wichtige Stationen auf dem Weg zur Lösung. Ein weiterer Grund ist der, daß ich die Schüler gleich zu Beginn mit Simulationen von Zufallsversuchen vertraut machen möchte; die Notwendigkeit dazu ergibt sich von selbst aus dem Fehlen eines "echten" Galton-Brettes.
Eine Demonstration am Modell oder am Computer lasse ich daher erst durchführen, wenn die theoretischen Überlegungen weit genug gediehen sind.

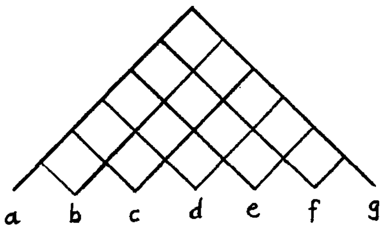
Um die Vielfalt der bei diesem Einstieg mit einem einzigen Zufallsgerät im Unterricht auftretenden Fragestellungen und Anknüpfungspunkte deutlich werden zu lassen, ist im folgenden als ein Beispiel die erste Unterrichtsdoppelstunde in einem Leistungskurs (12.2 im Schuljahr 1983/84) geschildert.

Ein möglicher Unterrichtsverlauf

Die Aufgabenstellung regte die Schüler zunächst zu verschiedenen Vermutungen an, von denen etliche vage mit dem "Gefühl, daß es eben so sein muß" begründet wurden. Im Widerstreit der Äußerungen zum "Kasten mit der größten Chance" schälten sich dann bald über den Vergleich der möglichen Wege zu den verschiedenen Kästen erste Begründungsansätze für Kasten d heraus. - Für mich sehr interessant war ein (zu einem sehr frühen Zeitpunkt gemachter) Vorschlag, die

Kästen c und e zu identifizieren und beide zu wählen. Zwar entsprach das nicht der Aufgabenstellung, aber der Schüler hatte die Symmetrie geschickt ausgenutzt: In der Tat ist ja $P(\{c,e\}) > P(\{d\})$.

Da nicht alle Schüler sofort den Zählvorgang nachvollziehen konnten, wurde an einem vereinfachten (Strich-) Modell das Zählprinzip im Gitternetz von einem Schüler erläutert. Einige Schüler erinnerten sich nun an das Pascal'sche Dreieck und den Zusammenhang zu den Binomialkoeffizienten der



Terme $(a \pm b)^n$, was zu einer ersten Gegenüberstellung von unterschiedlichen mathematischen Gegenständen, die demselben Zählprinzip unterliegen, führte.

Eine Schüleräußerung, daß Kasten d ja schon deshalb "am sichersten getroffen" werde, da die Kugel "auf dem Weg dorthin etwa gleich oft nach rechts und nach links fallen muß", führte zu einer genaueren Analyse der verschiedenen Kugelwege, in deren Verlauf (als abgewandeltes Gitternetz) der Wahrscheinlichkeitsbaum eingeführt wurde. Die Schüler stellten durch schrittweise Überlegung fest, daß jeder mögliche Weg der Kugel in "$\frac{1}{64}$ aller Fälle" vorkommt, widerlegten damit die o.g. Äußerung und verstärkten die Feststellung, daß die Anzahl der zu einem Kasten führenden Wege entscheidend ist. (Implizit waren damit Pfad- und Summenregel angesprochen.)

Gefragt nach einem Maß für die Chance der Kugel, in einem bestimmten Kasten zu gelangen, nannten die Schüler nun übereinstimmend den Quotienten aus "Anzahl der Wege zum Kasten" und "Anzahl aller möglichen Wege" (und hatten damit eine der Möglichkeiten, Wahrscheinlichkeiten zu definieren, vorbereitet).

Nun schwebte die Frage nach einer "Verifizierung" der soeben definierten Maßzahlen für Chancen förmlich im Raum. Da kein Galton-Brett vorhanden war, mußten die Schüler nach Simulationsmöglichkeiten suchen. Schnell kamen sie darauf, daß ein 6-maliger Versuch mit einem Nagel das Galton-Brett simulieren würde.
Eine Analyse dieser Simulation und die Hervorhebung der dabei auftretenden Chancen "$\frac{1}{2}$ nach rechts bzw. links" und der Vergleich mit anderen einfachen Zufallsversuchen führten zu einem Vorschlag eines Schülers, das Galton-Brett durch einen 6-maligen Münzwurf zu simulieren: "Wappen" $\hat{=}$ "rechts", "Zahl" $\hat{=}$ "links", die sechs Würfe entsprechen den sechs Nagelreihen, die Wurffolge "wwzzzw" $\hat{=}$ "rrlllr" wird mit dem zugehörigen Kasten d identifiziert.
An dieser Stelle wurde den Schülern besonders deutlich, daß zu einem bestimmten Kasten alle Wege mit einer stets gleichen Anzahl von Komponenten "r" bzw. "l" gehören.

Als Hausaufgabe bot sich natürlich geradezu an, jeden Schüler 20 Simulationen (also 20 Serien von sechs Münzwürfen) durchführen und protokollieren zu lassen.

Zusammenfassung und Ausblick

In der (durch große Schüleraktivität gekennzeichneten) Einstiegsdoppelstunde sind (z.T. implizit) folgende Aspekte angesprochen worden:

- Zählprinzip im Gitternetz, Binomialkoeffizienten
- Pfad- und Summenregel im Wahrscheinlichkeitsbaum
- Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten
- Simulation von Zufallsversuchen.

Die Hausaufgabe und ihre Auswertung führt zu den Begriffen
- absolute und relative Häufigkeit

und zum Problem
- Zusammenhang zwischen praktischer Stichprobenentnahme und theoretisch ermitteltem Wahrscheinlichkeitswert

einerseits, sie gibt andererseits Anlaß zu Überlegungen zur
- Verwendung unterschiedlicher Stichprobenräume:

$$S_1 = \{a,b,c,d,e,f,g\}; \quad S_2 = \{l,r\}^6 .$$

Alle diese für die Stochastik wichtigen Aspekte werden natürlich in der sich nun anschließenden Unterrichtsreihe ihrem Gewicht entsprechend vertieft behandelt; der Schüler ist aber durch den gewählten Einstieg mit ihrer Grundproblematik vertraut und kann bei späteren Betrachtungen immer wieder an das Einstiegsbeispiel erinnert werden.

Bemerkungen zum Grundkurs

Auch im Grundkurs hat sich dieser Einstieg bewährt, wobei allerdings in der Regel etwas mehr Zeit aufgewendet werden muß und unter Umständen nicht alle Aspekte angesprochen werden können. So ist z.B. das Erkennen des Pascal'schen Dreiecks von Grundkursschülern wohl seltener zu erwarten, und auch die Simulation durch sechsfachen Münzwurf mit den dazu notwendigen Identifikationen zwischen Wurffolge und Kasten bereiten erfahrungsgemäß erheblich mehr Schwierigkeiten.

Literatur

[1] Jäger, J. und Schupp, H.: Stochastik in der Hauptschule. - Paderborn: Schöningh, 1983