EINE AUFGABE ZUR STOCHASTIK DER SEKUNDARSTUFE II

von A. MÜLLER, Coburg

Die folgende Aufgabe eignet sich für den Leistungskurs Stochastik als Wiederholungsaufgabe des Gesamtstoffes (Lehrplan Bayern); Teile aus dieser Aufgabe (je nach Fortschritt im Kurs) können als Klausuraufgaben verwendet werden. Als Arbeitszeit für die Gesamtaufgabe sind 120 Minuten vorgesehen. Erläuterungen zur jeweiligen Prüfungsabsicht finden sich im Lösungsteil.

Einen Ausflug aufs Land verbinden wir mit der Besichtigung der Hühnerfarm des Bauern Pick. Schon von weitem hören wir das fröhliche Gackern glücklicher Hühner und das lustige Krähen stolzer Hähne, die in freier Natur geschäftig scharrend das reichlich vorhandene Futter suchen. Die Hähnchen sind (fast) überflüssig, aber auch die Hühnchen müssen sich nicht überanstrengen, da sie Bauer Pick nur die Eier legen läßt.

1. Zum Ausbrüten der Eier werden nämlich vollautomatische Brutöfen verwendet. Einer von diesen ist besonders störungsanfällig. Da er pro Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}2$ ausfällt, wird er einmal am Tag kontrolliert. Berechne die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

   A: Der Ofen fällt erstmals am 4. Tag aus.

   B: Der Ofen fällt frühestens am 5. Tag aus.

   C: Der Ofen fällt am 3. Tag zum ersten Male und am 8. Tag zum dritten Male aus.

2. Beim Ausbrüten der Eier sind erfahrungsgemäß nur 90 % befruchtet.

   a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß unter

      (1) 50 Eiern keines unbefruchtet ist.

      (2) 100 Eiern mindestens 92 befruchtet sind.

   b) Wieviele Eier muß man mindestens überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % wenigstens ein unbefruchtetes Ei zu finden?

   c) Eine Füllung des Brutofens enthalte jetzt einen u n b e k a n n t e n Anteil p unbefruchteter Eier. Schätze mit der

Tschebyschow-Ungleichung ab, welche Länge n eine Stichprobe (mit Zurücklegen) mindestens haben muß, um p mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 90 % bis auf 10 % genau bestimmen zu können. Welche Ungenauigkeiten enthält das Ergebnis?

3. Ob die Hähnchen des Bauern Pick zur Zucht weiterverkauft werden können, hängt vom Ausgang einer Bewertung durch ein unabhängiges Expertengremium ab. Es stehen fünf Prüfer zur Verfügung, von denen zwei als "mild" und drei als "streng" bekannt sind. Jede Bewertung eines Hähnchens wird von zwei Prüfern vorgenommen, die vorher ausgelost werden. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der strengen Prüfer.

a) (1) Bestätige, daß die Wahrscheinlichkeitsfunktion W der Zufallsgröße X folgende Werte besitzt:

x	0	1	2
W(x)	0,3	0,6	0,1

Gib die zugehörige Verteilungsfunktion F an.

(2) Zeichne ein Histogramm der Funktion W sowie den Graphen der Funktion F.

(3) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße X.

b) Die Wahrscheinlichkeit, diesen Test zu bestehen (Ereignis E) hänge wie folgt von der Anzahl X der strengen Prüfer ab:

$P_{X=0}(E) = 0{,}9$; $P_{X=1}(E) = 0{,}5$; $P_{X=2}(E) = 0{,}3$

(1) Zeige, daß unter dieser Voraussetzung ein Hähnchen nur mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 zur Zucht zugelassen wird.

(2) Ein zufällig ausgesuchtes Hähnchen darf zur Zucht weiterverwendet werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es nur von milden Experten bewertet worden?

4. Die Großbäckerei Süß verarbeitet täglich 2000 Eier aus der Farm des Bauern Pick. Aus langer Erfahrung weiß man, daß mit der (sehr kleinen) Wahrscheinlichkeit von 0,1 % Eier mit zwei Dottern auftreten.

a) Heute werden wieder 2000 Eier verarbeitet.

(1) Wieviele Eier mit zwei Dottern erwartet man?

(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich mehr als zwei solcher Eier unter den 2000?

b) Chefeieraufschläger Klack hat eine Strichliste über die Anzahl der Zweidottereier an den letzten 200 Tagen geführt und festgestellt, daß an 55 Tagen jeweils nur ein Zweidotterei verarbeitet wurde.

Entspricht diese Zahl der unter a) verwendeten Wahrscheinlichkeitsverteilung?

5. Lehrling Stift (erst seit wenigen Tagen in der Bäckerei) darf vorläufig nur zuschauen. Er beobachtet alle Arbeitsvorgänge genau und stellt bei der Entleerung des Backofens fest, daß es Rosinenbrötchen gibt, bei denen Rosinen an der Oberfläche zu sehen sind. Während er vermutet, daß 30 % aller Brötchen diese Eigenschaft aufweisen, behauptet Meister Süß, daß es nur 25 % seien.

a) Der Lehrling beschließt für sich, der Meinung seines Meisters nur dann zuzustimmen, wenn er unter den nächsten 100 Rosinenbrötchen höchstens 26 mit der oben genannten Eigenschaft zählt.

(1) Es stellt sich ein solches Ergebnis ein. Mit welcher Wahrscheinlichkeit könnte Stift dennoch eine Fehlentscheidung getroffen haben?

(2) Angenommen der Anteil wäre wirklich nur 25 %. Wie würde in diesem Falle eine mögliche Fehlentscheidung lauten und mit welcher Wahrscheinlichkeit träte sie ein?

b) Wie groß müßte eine Stichprobenlänge n mindestens sein und wie müßte die Entscheidungsregel für die Behauptung $p_0 = 0{,}25$ bei der Alternative $p_1 = 0{,}3$ lauten, wenn die beiden möglichen Fehler unter a) höchstens 5 % betragen sollen?

Lösungsteil

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, Tabellenwerk zur Stochastik und Taschenrechner

1. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen; Wartezeitprobleme:

$P(A) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}1024$

$P(B) = 0{,}8^4 = 0{,}4096$

$P(C) = \binom{4}{1}\, 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}01049$

2.a) Arbeit mit der Binomialverteilung und dem Tabellenwerk:

(1) $P_1 = B^{50}_{0,9}(X = 50) = 0{,}00515 = B^{50}_{0,1}(X = 0)$

(2) $P_2 = B^{100}_{0,9}(X \geqq 92) = 1 - B^{100}_{0,9}(X \leqq 91) = 0{,}32087$

b) Kenntnis des Satzes $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$; Aufstellen und Lösen der zugehörigen Ungleichung sowie eine Folgerung aus dem Ergebnis:

$$1 - (1 - 0{,}1)^n > 0{,}999$$
$$1 - 0{,}9^n > 0{,}999$$
$$0{,}9^n < 0{,}001$$
$$n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}9} = 65{,}56$$

$\Longrightarrow$ mindestens 66 Eier müssen überprüft werden.

c) Anwendung der Tschebyschow-Ungleichung im Spezialfall für relative Häufigkeiten mit Abschätzung der Größe von p(1-p):

$$P(|H_n - p| \leqq 0{,}1) \geqq 1 - \frac{p(1-p)}{n \cdot 0{,}1^2} \geqq 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}1^2} \geqq 0{,}9$$

$$\frac{1}{4n \cdot 0{,}1^2} \leqq 0{,}1$$

$\Longrightarrow \quad n \geqq 250$

Ungenauigkeiten:

1. Die Tschebyschow-Ungleichung gilt für alle Verteilungen, für die Erwartungswert und Varianz existieren. Sie ist deshalb im Vergleich mit der wirklich vorliegenden Verteilung ungenau.

2. p(1-p) wird durch den Maximalwert 0,25 abgeschätzt, der aber nur im Falle p = 0,5 zutrifft. Je weiter der wirkliche Wert für p von 0,5 entfernt ist, umso ungenauer wird das Ergebnis.

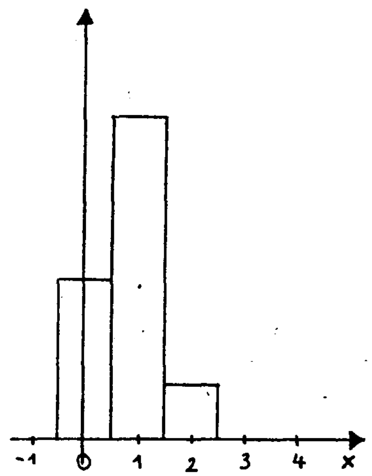
3.a) Berechnung von Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen ohne Zurücklegen; Aufstellen von Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion; Zeichnen von Histogramm und Verteilungsfunktion; Berechnen der Maßzahlen einer Zufallsgröße:

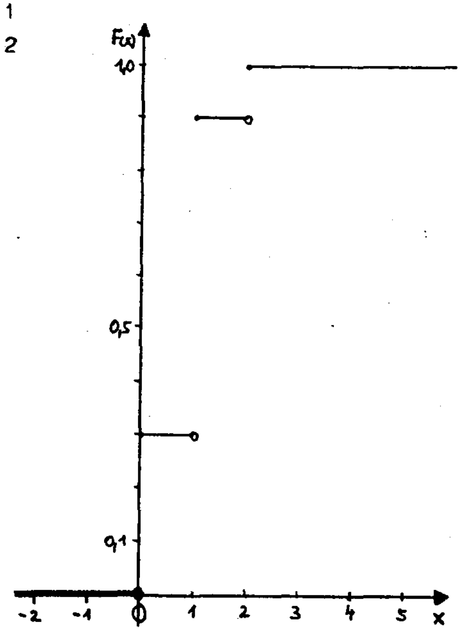
(1) $P(X=0) = \dfrac{\binom{2}{0}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{3}{10}$; $P(X=1) = \dfrac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{6}{10}$

$P(X=2) = \dfrac{\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{1}{10}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 0{,}3 & \text{für } 0 \leqq x < 1 \\ 0{,}9 & \text{für } 1 \leqq x < 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

(2)





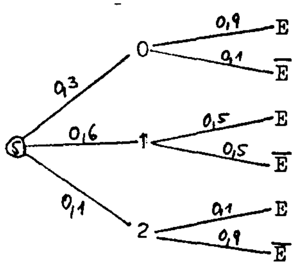
Histogramm mit $\Delta x = 1$

(3) $E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X=x_i) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}8$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}1 - 0{,}8^2 =$
$= 0{,}36$

b) Verwendung eines Baumdiagrammes bzw. der 1. und 2. Pfadregel; Formel von Bayes:

(1) Baumdiagramm:



$$P(E) = P_{X=0}(E)\cdot P(X=0) + P_{X=1}(E)\cdot P(X=1) + P_{X=2}(E)\cdot P(X=2) =$$
$$= 0{,}9\cdot 0{,}3 + 0{,}5\cdot 0{,}6 + 0{,}3\cdot 0{,}1 =$$
$$= 0{,}6$$

(2) Formel von Bayes:

$$P_E(X=0) = \frac{P_{X=0}(E).P(X=0)}{P(E)} = \frac{0{,}9.0{,}3}{0{,}6} = 0{,}45$$

4. Erkennen, daß bei "seltenen Ereignissen" die Poissonverteilung als Näherung der Binomialverteilung verwendet werden kann; Anwendung dieser Verteilung, Arbeit mit der Tabelle, Beurteilung eines Ergebnisses:

X sei die Anzahl der Zweidottereier

a) $E(X) = n.p = 2000.0{,}001 = 2$

b) $P_2(X>2) = 1 - P_2(X\leqq 2) = 0{,}32332$

c) $N = 200.P_2(X = 1) = 200.0{,}27067 = 54{,}13 \approx 55$

Der beobachtete Wert entspricht dem mit der Poissonverteilung berechneten Wert.

5. Testen von Hypothesen; Fehlerarten kennen; Näherung von Moivre-Laplace für die Binomialverteilung verwenden; Ergebnis beurteilen:

a) X sei die Anzahl der Brötchen mit der gesuchten Eigenschaft

(1) Fehlentscheidung: Die Hypothese $p = 0{,}3$ trifft zu, obwohl sich ein Ergebnis $X \leqq 26$ eingestellt hat.

$$P_1 = B^{100}_{0,3}(X\leqq 26) = 0{,}22440$$

(2) Fehlentscheidung: Obwohl die Hypothese $p = 0{,}25$ zutrifft, wird sie verworfen, weil sich ein Ergebnis $X > 26$ eingestellt hat.

$$P_2 = B^{100}_{0,25}(X>26) = 1 - B^{100}_{0,25}(X\leqq 26) = 0{,}35826$$

b) Erwartungswerte: $\mu_0 = 0{,}25\,n$; $\mu_0 = 0{,}3\,n$

Standardabweichungen: $\sigma_0 = \sqrt{0{,}25.0{,}75.n}$; $= \sqrt{0{,}3.0{,}7.n}$

Annahmebereich für die Nullhypothese: $A = [0;k]$

α - Fehler :

$$\alpha = B^{n}_{0,25}(X>k) =$$
$$1 - B^{n}_{0,25}(X\leqq k) \leqq 0{,}05$$
$$B^{n}_{0,25}(X\leqq k) \geqq 0{,}95$$

β- Fehler :

$$\beta = B^{n}_{0,3}(X\leqq k) \leqq 0{,}05$$

Näherung nach Moivre - Laplace:

$$\phi\left(\frac{k - 0{,}25n + 0{,}5}{\sqrt{0{,}25\cdot 0{,}75\cdot n}}\right) \geqq 0{,}95 \qquad \phi\left(\frac{k - 0{,}3n + 0{,}5}{\sqrt{0{,}3\cdot 0{,}7\cdot n}}\right) \leqq 0{,}05$$

$$\frac{k - 0{,}25n + 0{,}5}{\sqrt{0{,}25\cdot 0{,}75\cdot n}} \geqq 1{,}6449 \qquad \frac{k - 0{,}3n + 0{,}5}{\sqrt{0{,}3\cdot 0{,}7\cdot n}} \leqq -1{,}6449$$

1. $k - 0{,}25n + 0{,}5 \geqq 1{,}6449\cdot\sqrt{0{,}25\cdot 0{,}75\cdot n}$

2. $k - 0{,}3 + 0{,}5 \leqq -1{,}6449\cdot\sqrt{0{,}3\cdot 0{,}7\cdot n}$

aus 1. $k \geqq 1{,}6449\cdot\sqrt{0{,}25\cdot 0{,}75\cdot n} + 0{,}25n - 0{,}5$

aus 2. $k \leqq -1{,}6449\cdot\sqrt{0{,}3\;0{,}7\;n} + 0{,}3n - 0{,}5$

$$1{,}6449\cdot\sqrt{0{,}25\cdot 0{,}75\cdot n} + 0{,}25n - 0{,}5 \leqq -1{,}6449\sqrt{0{,}3\cdot 0{,}7\cdot n} + 0{,}3n - 0{,}5$$

$$\sqrt{n} \geqq \frac{1{,}6449(\sqrt{0{,}25\cdot 0{,}75} + \sqrt{0{,}3\;0{,}7})}{0{,}05}$$

$n \geqq 859{,}72 \Longrightarrow n = 860$

Aus 1. und 2. folgt: $k \approx 235{,}4 \Longrightarrow k = 236$

Die Stichprobe muß mindestens 860 Brötchen enthalten.

Die Nullhypothese $p_0 = 0{,}25$ wird angenommen, wenn höchstens 236 Brötchen mit Rosinen an der Oberfläche gefunden werden.