Stochastik in der Schule, Heft 3, Band 5 (1985)

Stochastische Einperioden-Lagerhaltungsmodelle

von Norbert Therstappen, Aachen

In nahezu allen Betrieben spielen Fragen der Lagerhaltung eine bedeutende Rolle. Dabei lassen sich hauptsächlich zwei Lagertypen betrachten. Einmal werden die für die Produktion benötigten Teile gelagert, so dann gibt es ein Lager, in das die Fertigprodukte gelangen können, bevor sie vom Kunden nachgefragt werden. Diese Lageranlagen bilden also einen Puffer in den Güterströmen von den Lieferanten zur Unternehmung und von dort zum Verbraucher.
Diese Struktur wird in Abbildung 1 schematisch dargestellt, wobei ein Informations- und ein Warenstrom auftreten.

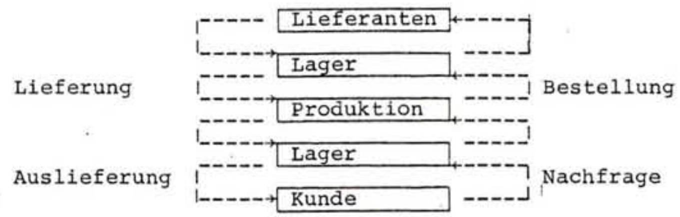

Abbildung 1:
Die wirtschaftliche Lagerungsproblematik wäre ohne jedes mathematische Interesse, wenn man die verschiedensten Güter beliebig lange in jeder Menge lagern könnte. Tatsächlich verursacht der Lagervorgang jedoch erhebliche Kosten, für die Minimierungsmodelle gesucht werden.
Fragen der Lagerhaltungstheorie lassen sich im Unterricht der Sekundarstufe II sowohl im Analysis-, wie auch im Stochastikunterricht behandeln. Setzt man die Nachfrage als bekannt voraus, man spricht von deterministischen Lagerhaltungssystemen, so ermittelt man die optimale Bestellmenge und den optimalen Bestellzeitpunkt im Rahmen einer gewöhnlichen Extremwertaufgabe (vgl. Beispiel 1). Geht man von zufälliger, dem Lagerhalter unbekannter Nachfrage aus, so läßt sich diese Aufgabe im Stochastikunterricht nach Einführung der Zufallsvariablen und der Wahrscheinlichkeitsverteilung besprechen.

Wie oben schon erwähnt wurde, werden bei allen Lagerhaltungsmodellen Kosten minimiert. Wir unterscheiden:
1) Bestellkosten. Sie setzen sich aus fixen Kosten (Formulare, Telefonkosten etc.) und dem Preis für das zu lagernde Produkt zusammen. Wir nehmen an, daß der zu zahlende Preis direkt proportional zur bestellten Menge ist und erhalten somit die Bestellkostenfunktionsgleichung

(1) $B(z) = K\,\delta(z) + c\cdot z,\ z \geq 0$

$$\text{mit } \delta(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z=0 \\ 1 & \text{für } z>0. \end{cases}$$

Die direkte Proportionalität der Bestellkosten zur bestellten Menge wird in vielen Fällen nicht der Wirklichkeit entsprechen. Bei großen Bestellungen werden häufig Rabatte gewährt. In solchen Fällen läßt sich die Bestellkostenfunktion durch eine Gleichung folgenden Typs beschreiben.

$$(2) \qquad B(z) = K\,\delta(z) + \begin{cases} c_1 z & z\in[0,a_1[\\ c_2 z & z\in[a_1,a_2[\\ c_3 z & z\in[a_2,a_3]. \end{cases}$$

Dabei ist die Anzahl der Sprungstellen bzw. Knicke variabel.
2) Lagerungskosten fallen durch das Lagern des Produktes an. Sie setzen sich aus Kosten für die Unterhaltung des Lagers (Miete, Heizung, Strom etc.), Lohnkosten, Zinsen für im Lager gebundenes Kapital, Abschreibungskosten, Versicherungsprämien etc. zusammen.
3) Fehlmengenkosten entstehen, wenn das Lager nicht lieferbereit ist und setzen sich z.B. aus höheren Transportkosten für Eilzustellungen, Konventionalstrafen für nicht eingehaltene Termine sowie aus dem entgangenen Gewinn oder dem Verlust von Anschlußaufträgen zusammen. Sie sind in der Praxis schwer zu quantifizieren und erfordern große Sorgfalt bei der Modellbildung.
Mit h bezeichnen wir die Lagerungs-, mit p die Fehlmengenkosten, wobei wir auch diese Kosten als proportional zur Menge voraussetzen, d.h.

(3) $h(y) = h\cdot y\ ;\ p(y) = p\cdot y$.

Dabei betrachten wir ein Lager, indem ein Produkt während der Zeit T (Periode der Länge T) gelagert wird. Zu Beginn der betrachteten Periode befinden sich x Einheiten des zu lagernden Produktes in der Anlage; nun entscheidet der Lagerhalter, ob er weitere Einheiten der Ware bestellt, die ihm ohne Lieferverzögerung zugesandt werden können, so daß er über $y = x + z$ Einheiten verfügen kann.
Bei dieser Entscheidung wird sich der Lagerhalter von Optimalitätsgesichtspunkten leiten lassen und versuchen, die durch das Lager entstehenden Kosten zu minimieren.
Dieses Minimierungsproblem untersuchen wir zunächst für ein deterministisches Lagermodell.

Beispiel 1:
Bei einem gelagerten Produkt muß der Lagerhalter folgende Kosten berücksichtigen. Feste Bestellkosten: K = 2,-DM; Preis: c = 1,50 DM pro Stück; Lagerungskosten h = 0,30 DM pro Stück pro Tag; Nachfrage ξ = 30 Stück pro Tag. Zu bestimmen sind

a) die Länge τ einer Bestellperiode und die Lagerungskosten pro Bestellperiode bei einem Anfangsbestand von z = 200 Stück,
b) die kostenoptimale Bestellmenge und die kostenoptimale Periodenlänge.

a) Wir veranschaulichen die Aufgabe zunächst graphisch

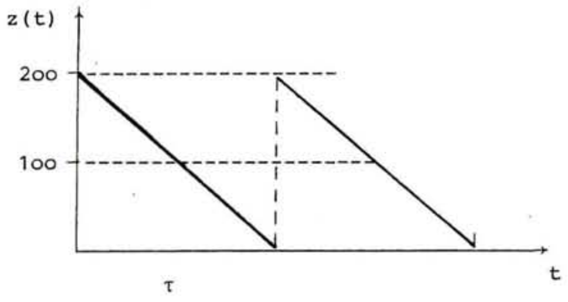

Abbildung 2:
Die nächste Bestellung und Lieferung wird für z = 0 erfolgen, da dadurch die Lagerungskosten minimiert werden. An einem Tag werden 30 Produkteinheiten nachgefragt, so daß sich mit der Steigungsformel von Geraden folgende Beziehung ergibt.

$30 = \frac{200}{\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{200}{30} = 6,\bar{6}$, d.h. bei einem Anfangsbestand von 200 Stück muß der Lagerhalter nach ca. 6,5 Tagen neue Ware bestellen. Betrachtet man die Parallele zur Abszisse durch den Ordinatenwert $z = 100$, so folgt unmittelbar aus Kongruenzüberlegungen, daß der mittlere Lagerbestand $\frac{200}{2} = 100$ beträgt. Damit erhält man für die Lagerungskosten pro Bestellperiode

$l = 0,3 \cdot \frac{200}{30} \cdot \frac{200}{2} = 200.$

b) Sicherlich ist das Verhalten des Lagerhalters in Teil a der Aufgabe nicht kostenoptimal, da es keinen Grund für den hohen Lagerbestand von 200 Stück gibt. Die Ergebnisse aus Teil a lassen sich allgemein folgendermaßen formulieren. Zwischen Nachfrage, Anfangsbestand und Periodenlänge besteht die Beziehung

(3) $\xi = \frac{z}{\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{z}{\xi}$ sowie für die Lagerungskosten l pro Bestellperiode

(4) $l = h\,\tau\,\frac{z}{2}$.

Wir wollen z so bestimmen, daß die Gesamtkosten C pro Tag (pro Zeiteinheit) minimiert werden. Für die Bestellkosten benutzen wir Formel (1) mit $\delta(z) = 1$. Die Kosten pro Tag können dann durch folgende Gleichung beschrieben werden.

(5) $C(z,\tau) = \frac{1}{\tau}\,(K + cz + h\tau\frac{z}{2})$

Durch Einsetzen von (3) in (5) erhalten wir

(6) $C(z) = \frac{\xi}{z}\,(K + cz + h\,\frac{z}{\xi}\,\frac{z}{2}) = \frac{\xi K}{z} + \xi c + h\,\frac{z}{2}$

Zur Berechnung der optimalen Bestellmenge bestimmen wir das Minimum der Funktion C.

$C'(z) = -\frac{\xi K}{z^2} + \frac{h}{2}$. Wir bestimmen die Nullstelle der Ableitung und erhalten

$-\frac{\xi K}{z^2} + \frac{h}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi K}{z^2} = \frac{h}{2} \Leftrightarrow \frac{z^2}{\xi K} = \frac{2}{h} \Leftrightarrow z^2 = \frac{2\xi K}{h}$

Als hinreichende Bedingung betrachten wir

$c''(z) = \frac{2\xi K}{z^3} > 0$. Somit erhalten wir die kostenoptimale Bestellmenge $\bar{z} = \sqrt{\frac{2\,\xi\,K}{h}}$. Mit (3) erhält man die optimale

Periodenlänge $\bar{\tau} = \sqrt{\frac{2\,K}{h\,\xi}}$. Mit den Zahlenwerten aus Teil a dieser Aufgabe erhalten wir $\bar{z} = 20$ und $\bar{\tau} = 0,\bar{6}$. □

Im stochastischen Fall gehen wir nun davon aus, daß die Nachfrage nach dem Lagergut durch eine nichtnegative Zufallsvariable X mit bekannter diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben ist. Mit der Bezeichnung $p_n = P(X = \xi_n)$ ergibt sich für die Verteilungsfunktion die Darstellung

(7) $F(\xi) = P(X \leq \xi) = \sum_{\xi_n \leq \xi} p_n$

d.h. die Verteilungsfunktion ist eine Treppenfunktion mit Sprüngen $p_1,\ldots,p_n$ an den Stellen $\xi_1,\ldots,\xi_n$.

Außerdem muß festgelegt werden, wann Nachfrage innerhalb einer einzelnen Periode auftritt. In der Literatur sind folgende Festlegungen gebräuchlich: a) die Nachfrage tritt unmittelbar nach der Lieferung der Bestellung auf, b) die Nachfrage tritt am Ende der Periode auf, c) die Nachfrage tritt gleichmäßig innerhalb der Periode auf.

Wir entscheiden uns für Möglichkeit (a) , dann wird für die Lagerungs- und Fehlmengenkostenrechnung nur der Restbestand $w = y-\xi$, $X(\omega)=\xi$, bewertet und es ergeben sich die Funktionsgleichungen

$$(8)\quad \begin{aligned} h(w,\xi) &= \begin{cases} h\cdot(y-\xi) & \text{für } y-\xi > 0 \\ 0 & \text{für } y-\xi \leq 0 \end{cases} \\ p(w,\xi) &= \begin{cases} 0 & \text{für } y-\xi > 0 \\ p\cdot(\xi-y) & \text{für } y-\xi \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Jetzt können wir die mittleren erwarteten Lagerungs- und Fehlmengenkosten bestimmen. Dieser Erwartungswert hängt von y ab und wird mit L(y) bezeichnet. Er ergibt sich zu

(9) $L(y) = \sum_{0\leq\xi<y} h(y-\xi)P(X(\omega)=\xi) + \sum_{y\leq\xi} p(\xi-y)P(X(\omega)=\xi)$.

Für (9) wird häufig folgende Darstellung gewählt. Wir fügen zu (9) denselben Summanden zu und subtrahieren ihn auch wieder, damit wir den Erwartungswert von X explizit benutzen. Es ergibt sich:

$$L(y) = h \sum_{0\leq\xi<y} (y-\xi)P(X(\omega)=\xi) + p \sum_{0\leq\xi<y} (y-\xi)P(X(\omega)=\xi) + $$
$$+ p \sum_{y\leq\xi} (\xi-y)P(X(\omega)=\xi) - p \sum_{0\leq\xi<y} (y-\xi)P(X(\omega)=\xi)$$

$$= (h+p) \sum_{o\leq\xi<y} (y-\xi)P(X(\omega)=\xi) + p\left(\sum_{y\leq\xi} \xi P(X(\omega)=\xi) - \sum_{y\leq\xi} yP(X(\omega)=\xi)\right.$$

$$\left. - \sum_{o\leq\xi<y} yP(X(\omega)=\xi) + \sum_{o\leq\xi<y} \xi P(X(\omega)=\xi)\right)$$

$$= (h+p) \sum_{o\leq\xi<y} (y-\xi)P(X(\omega)=\xi) + p(\sum_{\xi} \xi P(X(\omega)=\xi) - \sum_{\xi} yP(X(\omega)=\xi))$$

$$= (h+p) \sum_{o\leq\xi<y} (y-\xi)P(X(\omega)=\xi) + p(E(X) - y\sum_{\xi} P(X(\omega)=\xi)$$

$$= (h+p) \sum_{o\leq\xi<y} (y-\xi)P(X(\omega)=\xi) + p(E(X) - y\,P(\Omega))$$

$$= (h+p) \sum_{o\leq\xi<y} (y-\xi)P(X(\omega)=\xi) + p(E(X) - y).$$

Beispiel 2: In einem Lager fallen Lagerungskosten von h = 15o,- DM/ME und Fehlmengenkosten von p = 75,- DM/ME an. Die Verteilung der Nachfrage ist durch folgende Tabelle gegeben.

$X(\omega) = \xi$	o	1	2	3	4	5	6	7
$P(X(\omega)=\xi)$	o	o,1	o,1	o,2	o,3	o,2	o,1	o

Herzuleiten sind L(o),...,L(7) und der Graph von L.

Wir bestimmen zunächst den Erwartungswert

$E(X) = 1\cdot o,1+2\cdot o,1+3\cdot o,2+4\cdot o,3+5\cdot o,2+6\cdot o,1 = 3,7$

$L(o) = 75(3,7-o) = 277,5$

$L(1) = 225(1-o)P(X(\omega)=o)+75(3,7-1) = 2o2,5$

Ebenso erhalten wir

$L(2) = 15o$, $L(3) = 12o$, $L(4) = 135$, $L(5) = 217,5$, $L(6) = 345$, $L(7) = 495$.

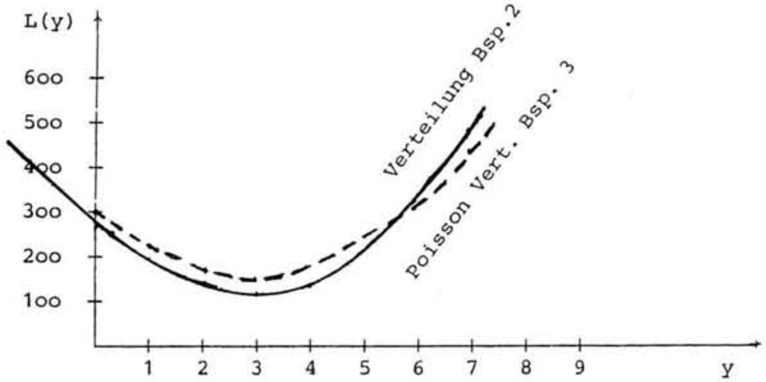

Abbildung 3:

Nimmt y Werte kleiner o an, so ist der erste Summand Null und wir erhalten:

$L(y) = p(E(X)-y) \Leftrightarrow L(y) = 75(3,7-y) \Leftrightarrow L(y) = -75y + 277,5$

d.h. für y < o ist L linear. □

Beispiel 3: Wir betrachten ein Lager, indem dieselben Lagerungs- und Fehlmengenkosten wie in Beispiel 1 anfallen. Die Nachfrage sei jedoch Poissonverteilt mit Mittelwert 4. Zu bestimmen sind L(o), L(1),...,L(7).

Benutzen wir die Werte der Poissonverteilung, so erhalten wir

y	o	1	2	3	4	5	6	7
L(y)	3oo	229,1	174,3	151,9	172,8	236,9	335,6	457,2

Der Graph der Funktion L bei Poissonverteilter Nachfrage ist zusätzlich in Abbildung 3 dargestellt, womit die Abhängigkeit von der zugrunde liegenden Verteilung deutlich wird. □

Nachdem wir die erwarteten Lagerungs- und Fehlmengenkosten bestimmt haben, können wir nun die minimalen erwarteten Lagerungskosten C(x) bei Modellen mit sofortiger Lieferung angeben. Wir erhalten:

$$(1o)\quad C(x) = \min_{z\geq o} (K\delta(z) + cz + L(x+z)).$$

Mit y=x+z und G(y) = cy + L(y) ergibt sich

$$(11)\quad C(x) = -cx + \min_{y\geq x} (K\delta(y-x) + G(y)).$$

Wir untersuchen zunächst den Fall, bei dem die festen Bestellkosten Null sind, K=o. Dann hat (11) die Gestalt

$$(12)\quad C(x) = -cx + \min_{y\geq x} (G(y)).$$

Bei pro Mengeneinheit konstanten Lagerungs- und Fehlmengenkosten ist die Funktion L konvex; da c linear ist und außerdem $\lim_{|y|\to\infty} G(y) = \infty$ gilt, hat G ein eindeutiges Minimum.

Differenzieren wir die Funktion G, so ergibt sich

$$G'(y) = c + L'(y) = c + (h+p)\sum_{o\leq\xi<y} P(X(\omega)=\xi) - p\,.$$

Setzen wir G'(y) = o, so erhalten wir

$$o = c + (h+p)\sum_{o\leq\xi<y} P(X(\omega)=\xi) - p$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-c}{h+p} = \sum_{o\leq\xi<y} P(X(\omega)=\xi).$$

Hierbei ist p>c, da sonst eine Lagerung nicht sinnvoll wäre.

Wegen der Konvexität von G und der ausschließlichen Betrachtung diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen ergibt sich die "kritische" Zahl $\bar{y}$ aus der Gleichung

$$(13) \quad \sum_{\xi=0}^{\bar{y}-1} P(X(\omega)=\xi) \le \frac{p-c}{h+p} \le \sum_{\xi=0}^{\bar{y}} P(X(\omega)=\xi).$$

Jetzt lassen wir feste Bestellkosten zu, d.h. wir erhalten statt (11) die Kostengleichung

$$(14) \quad C(x) = -cx + \min_{y \ge x} (K\delta(y-x) + G(y)).$$

Sei nun S der y-Wert, für den die Funktion G ihr Minimum annimmt, d.h. $G'(S) = 0$.

Nun wird der Lagerhalter nur dann Produkte bestellen, wenn die Kosten durch diese Bestellung verringert werden. Wird keine Bestellung aufgegeben entstehen die Kosten $C_1(x) = -cx + G(x)$, x war der Bestand vor der Bestellung. Bestellt der Lagerhalter dagegen kostenoptimal, so errechnen sich seine Kosten gemäß

$C_2(x) = -cx + K + G(S)$.

Eine Bestellung wird nur aufgegeben, wenn

$C_2(x) \le C_1(x) \Leftrightarrow K + G(S) \le G(x)$.

Sei nun $s = \max\{x/x<S, G(x) \ge K + G(S)\}$, dann läßt sich die optimale Politik folgendermaßen formulieren.

$$(16) \quad \begin{cases} \text{ist } x \le s, \text{ bestelle } z = S-x \\ \text{ist } x > s, \text{ so gib keine Bestellung auf.} \end{cases}$$

Eine solche (s,S)-Politik ist immer dann optimal, wenn L ein eindeutiges Minimum hat.

Beispiel 4:

In einem Lager treten die folgenden Kosten auf: K = 1,-DM, h = 0,50,-DM, p = 0,80,-DM, c = 0,30,-DM. Die Nachfrage nach dem Produkt sei $B_k(20;0,25)$ verteilt. Man bestimme die optimale (s,S)-Politik.

Zunächst geben wir die Werte der Binomialverteilung an.

k	$B_k(20;0,25)$
0	0,00317
1	0,02114
2	0,06695
3	0,13390
4	0,18969
5	0,20233

k	$B_k(20;0,25)$
6	0,16861
7	0,11241
8	0,06089
9	0,02706
10	0,00992

k	$B_k(20;0,25)$
11	0,00301
12	0,00075
13	0,00015
14	0,00003
15	0,00000
20	0,00000

Der Erwartungswert der $B_k(20;0,25)$ verteilten Nachfrage ist $E(X) = 20 \cdot 0,25 = 5$. Mit diesen Daten können wir die Wertetabelle der Funktion G aufstellen

y	G(y)
0	4
1	3,5054
2	3,0358
3	2,6543
4	2,4469
5	2,4862
6	2,7884
7	3,3098
:	:

Die Funktion G nimmt ihr Minimum für y=4 an, somit ist S=4.

Jetzt müssen wir gemäß (16) s bestimmen.

$4 = G(0) > 1+2,4469$

$3,5054 = G(1) > 1+2,4469$

aber

$3,0358 = G(2) < 1+2,4469$.

Somit ist s=1. Damit können wir die optimale (s,S) = (1,4) Politik des Lagerhalters angeben. Ist sein Bestand $x \le 1$, so bestellt er 4-x Einheiten; ist der Bestand größer 1, so wird keine Bestellung aufgegeben.

Literatur:

[1] Barth F.,H. Bergold, R.Haller(1981)
Stochastik Tabellen
Ehrenwirth Verlag München

[2] Hochstädter D.,(1969)
Stochastische Lagerhaltungsmodelle
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York