WIEVIEL FORMALISMUS IST DIDAKTISCH SINNVOLL?

von HANS G. SCHÖNWALD, Siegen

ZDM-Klassifikation: E40

Wieviel Formalismus didaktisch sinnvoll ist, muß vor jeder mathematikdidaktischen Konzeption einigermaßen beantwortet worden sein. Jede hochschulfähige Mathematik und insbesondere ihre hochkomprimierte Darstellungsweise ist nur in einer gewissen Vereinfachung oder als elementarisiertes Spiegelbild oder als denktechnische Vorstufe im Unterricht behandelbar. Über den Grad der angebrachten Reduzierung gehen die Meinungen auseinander. Macht eine Vereinfachung die mitzuteilende Idee noch deutlich? Bereitet sie deren Verstehen vor? Trägt sie maßgeblich dazu bei? Bleibt die "innere Logik" einer Fragestellung, ihr mathematischer Witz in der Vereinfachung ein wenig erhalten? Ist sie einem denkbegabten, jungen Menschen intuitiv interessant? Erschließt, entfaltet sie ihm sein Denkvermögen? Vermag der danach zu unterrichtende Schüler die Einzelschritte der Gedankengänge zu verstehen und einen Sinn des Ganzen zu erahnen? Entsprechende Fragen über die Angemessenheit von Formalismen sind beiläufig zu klären: Ist die formale Darstellung dem reduzierten Niveau noch angemessen? Kann sie schon mißverständlich werden? Oder ist sie auf den neuen Rahmen der Reduktion bezogen noch unnötig umständlich? Spiegelt sie diejenigen Gedankenelemente wider, die einem Schüler dabei bewußt sind? Zwingt man ihn, trotz mangelnden Verständnisses "mathematisch erforderliche" Zeichenketten zu lesen und zu reproduzieren oder zwingt man ihn, was ihm schon selbstverständlich ist, "aus methodischen Gründen" wieder und wieder hinzuschreiben?

Dieser Fragenkomplex trifft m. E. ein heute noch ungelöstes und weitgehend unerkanntes Problem des Mathematikunterrichts; es wird zwar theoretisch diskutiert, aber welche Last es in der Praxis darstellt, wird m. E. völlig unterschätzt. Dieses Problem kann und soll hier nicht gelöst werden. Jedoch wirkt schon die Bewußtwerdung dieser Problematik entschärfend. Im folgenden soll lediglich ein Aspekt dieser Problematik an Beispielen erläutert werden, nämlich die Frage, wie scharf formale Konventionen in der Unterrichtspraxis eingehalten werden müssen.

Zwar läßt sich fast jeder Grad an Schärfe einüben, erzwingen; aber durch den Nachdruck auf einen Aspekt verblassen für die Schüler zugleich die anderen Aspekte derselben zu vermittelnden Sache. Die Eigenschaften der formalen Darstellung einer Sache sollten im Bewußtsein der Schüler zu den dargestellten Inhalten passen; sonst erscheint ihnen Mathematik rezepthaft, nichtssagend oder unsinnig. An einigen Beispielen soll die Fragwürdigkeit von solchen schulüblichen Formalismen demonstriert werden. Praktisch können die Schüler ganz gut mit den theoretisch mißverständlichen Schreibweisen leben. Dies zeigt die Erfahrung. Unverzichtbar ist jedenfalls, daß die Schüler die "Mitte der Sache", ihren mathematischen Sinn, im Auge behalten.

Die Werke von C. F. Gauß oder von anderen "alten" Mathematikern unterscheiden sich rein äußerlich von heutigen mathematischen Werken. Sie sind weitgehend verbal formuliert. Nun gibt es gute Gründe dafür, formalistischer vorzugehen. Man zielt auf gedankliche Absicherung. Für manche Menschen haftet solchen mathematischen Aussagen sogar definitive Gewißheit an. Im Mathematikunterricht ist in den letzten Jahrzehnten das Streben nach Exaktheit in der Darstellung als eine methodische Tugend geübt worden. Gelegentlich hat sie sich sogar verselbständigt; ohne ihren Zweck im Auge zu behalten, wird sie manchmal rücksichtslos "eingebläut". Man vergleiche die Ausführungen in [2].

Die folgenden Beispiele sind Notizen eines Lehrers. Sie entbehren der Reflexion an der didaktischen Literatur, und sie genügen auch nicht den Kriterien empirischer Forschungsmethoden. Beides würde einen Lehrer im "üblichen Schulbetrieb" überlasten. Sie spiegeln aber - hoffentlich - den Schulalltag wider und vermitteln originäre Probleme desselben. Eine verwandte Betrachtung ist in [1] dargelegt.

WIE EINHEITLICH SOLLTEN SCHREIBWEISEN INNERHALB EINER KLASSE SEIN?

Diese Frage ist die Quintessenz der im folgenden beschriebenen unterrichtlichen Situation. In einer Klassenarbeit zur Wahrscheinlichkeitstheorie in Klasse 6 (Gymnasium) stellte ich die Aufgabe: "Ein Dominospiel besteht aus 28 Steinen von (0/0) bis (6/6), wobei die erste Zahl im Zahlenpaar niemals größer sein darf als die zweite. Von den verdeckt liegenden Steinen wird einer ausgewählt. Ermittle die folgenden Ereignisse: a) Die Summe der Augenzahlen auf dem Stein ist 7; b) ... " Im vorausgehenden Unterricht hatte ich die mengentheoretische Schreibweise derartiger Zahlenpaarmengen nicht thematisiert. Während die richtige Schreibweise

{(1/6),(2/5),(3/4)}

von keinem Kind geschrieben wurde, fand ich eine Fülle anderer Schreibweisen. Da es mir hier nur um die Schreibweise geht, habe ich die folgenden Darstellungen zahlenpaarmäßig berichtigt; die erste Schreibweise wurde von 8, die weiteren je von 1 oder 2 Schülern benutzt:

{1/6,2/5,3/4}	1/6,2/5,3/4	{1,6/2,5/3,4}	{16,25,34}
{1\6,2\5,3\4}	(1/6),(2/5),(3/4)	{1,6 , 2,5 , 3,4}	{1-6,2-5,3-4}
{1/6;2/5;3/4}	(1/6) (2/5) (3/4)	{1,6;2,5;3,4}	{1/6-2/5-3/4}
{1/6 2/5 3/4}			

Jede dieser Schreibweisen ist in sich stimmig. Und fast jedes Kind hat auch seine Schreibweise in allen weiteren Teilaufgaben beibehalten. Die Kinder können in allen diesen Schreibweisen zeigen, daß sie die Sache kombinatorisch verstanden haben. Auch in der Literatur sind mehrere dieser Schreibweisen vertreten. Deshalb ergibt sich hier die Frage: Soll man in einer Klasse eine einheitliche Schreibweise ggf. repressiv erzwingen, oder soll man diese freistellen? - Speziell bei meinen Schülern erschien mir diese Vielfalt kaum Verwirrung bzgl. des Verständnisses der Sache zu stiften, und eine einheitliche Schreibweise wäre nur extramathematisch zu begründen.

DARF EINE GLEICHUNG INNERHALB EINER BEZEICHNUNG VORKOMMEN?

Die Schreibweisen $f|_{x=2}$, $f(x=2)$, "f an der Stelle x=2" sind verboten bzw. verpönt. Die erste lehnt an eine Schreibweise für "Projektion oder Reduktion auf" an; dann wird aber tiefstehend eine Menge geschrieben. Die zweite stellt einen gelegentlichen Schülerfehler dar; sie wird wohl von Schülern als angemessen empfunden, weil ja "dort x steht und an dessen Stelle nun 2 einzusetzen ist". Die dritte ist verbreitet, aber genau genommen doch falsch; denn x=2 bedeutet eine Aussageform, und das eindeutige Element aus deren Lösungsweg bei geeigneter Grundmenge ist eigentlich gemeint.

Nun ist aber in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Schreibweise

$$P(X=2)$$

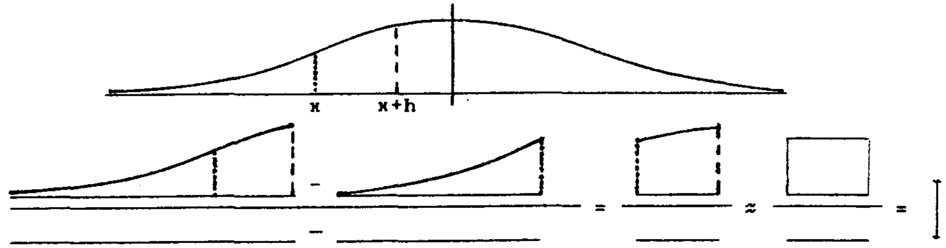
im Gebrauch. Sie verkürzt die Schreibweise

$$P(\{X \in S \mid X=2\}),$$

aber sie entstellt sie nicht; und die Kurzschreibweise interferiert nicht mit ähnlichen Schreibweisen. Denn in der Stochastik werden andere Dinge schwerpunktmäßig behandelt und feinsinnig variiert. Die $P(\{\ldots\})$-Bezeichnung wird auf dem maßtheoretischen Hintergrund der Wahrscheinlichkeitstheorie gerechtfertigt und erforderlich; für den "praktischen" Gebrauch ist die Kurzform hinreichend deutlich.

ÜBER DEN GEBRAUCH IKONISCHER SCHREIBWEISEN

Den Zusammenhang zwischen einer kumulativen Wahrscheinlichkeitsfunktion und der zugehörigen Dichte beschreibt für kontinuierliche Verteilungen der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Für die Normalverteilung läßt er sich folgendermaßen beweisen:



Es ist eine algebraische Geschichte mit geometrischen Wörtern. Sie ist ansprechend, genügend klar und schon auf niedrigem mathematischen Niveau selbstverständlich. Sie ist konkret an eine spezielle Funktion gebunden, weist aber darüber hinaus. Sie vermittelt die Idee des Hauptsatzes. Die abstrakte und allgemeine Reichweite des Hauptsatzes besagt sie nicht; aber sie beugt dem vor, daß das Reden über den Satz zu einem leeren Geschwätz wird.

LITERATUR

[1] SCHÖNWALD, H. G.: Pro und Contra sauber geführtes Mathe-Heft, SMP 11 (1983), 52-53.

[2] VOLLRATH, H.-J.: Störungen des "didaktischen Gleichgewichts" im Mathematikunterricht, MNU 40 (1987), 373-378.