

ZUM SCHÜLERVERSTÄNDNIS VON MITTELWERTEN

von Simon Goodchild, College of St.Mark and St.John,
Plymouth, England
Originaltitel in "Teaching Statistics" Vol.10 (1988) Nr.3:
School Pupils Understanding of Average
Übertragung: Bernd Wollring, Universität Münster

Das Betrachten des "Mittelwertes" einer Datenserie ist möglicherweise die am weitesten verbreitete Grundidee aus der Statistik im täglichen Leben. Wir lesen etwa in der Zeitung vom mittleren Einkommen, vom mittleren monatlichen Niederschlag, usw., woraus wir erwarten, etwas über die Verteilung von Einkommen oder Niederschlägen aussagen zu können. In den Schulen lehren wir die Berechnung verschiedener Maße für Mittelwerte, entweder zu Daten, die die Schüler selbst gesammelt haben oder zu solchen, die ihnen gegeben wurden, aber wir schenken dem umgekehrten Prozeß des Verstehens wenig Beachtung, des Verstehens davon, was uns der Mittelwert über die Gesamtheit aussagt, die er umfaßt. In diesem Artikel berichten wir von einer explorativen Studie über das, was 13- bis 14jährige Schüler äußern, wenn sie dem Begriff "Mittelwert" in einer alltäglichen Situation begegnen. Die Schlußfolgerung geht in etwa dahin, daß die Möglichkeit dieses umgekehrten Verstehensprozesses nicht als sicher anzunehmen ist, und ein Teil unseres Statistikerunterrichts darin bestehen sollte, Situationen vorzusehen, in denen Befunde darüber gefragt sind, was der Mittelwert einer Verteilung uns über diese Verteilung sagt.

Frühere Untersuchungen zum Verständnis des Mittelwertes bei Schülern haben, obgleich sie aus methodischen Gründen kritisiert wurden, verschiedene Fehlvorstellungen dargestellt.

POLLATSEK, LIMA und WELL (4) geben an:

"Für viele Schüler ist das Umgehen mit dem Mittelwert eher ein Rechenvorgang als begriffliches Vorgehen. Die Kenntnisse des Mittelwertes beginnen und enden mit einer verarmten Rechenformel. Die pädagogische Botschaft ist klar: Das Lernen einer Rechenformel ist ein armer Ersatz dafür, zu einem Verstehen des zugrunde liegenden Begriffes zu gelangen."

In einer späteren Arbeit kommt MEVARECH (2) zu dem Befund:

"...diese Ansammlung von Fehlvorstellungen ist so tief im zugrunde liegenden Denken des Lernenden verankert, daß allein das Anbieten eines fortgeschritteneren Kurses zur Statistik nicht hinreicht, um diese Fehlvorstellungen zu überwinden."

BARR (1) berichtet von einer Pilotstudie, die auf Test-Items basiert, die Studenten für die Qualifikation des "Technical Education Council (TEC)" benötigen. BARR kommentiert seine Ergebnisse:

"Es scheinen im Zusammenhang mit dem Median und dem Modalwert oberflächliche Vorstellungen gelernt zu sein. Die Antworten der Lernenden geben folgende Grundzüge an: Der Median ist der "mittlere" Wert, und der Modalwert ist der häufigste. Darüber hinaus haben die Lernenden verworrene Vorstellungen davon, wie man diese Regeln anwendet."

Dieser Aufsatz berichtet über Interviews mit siebzehn Schülern der dritten Klasse im Sekundarstufen-Bereich (13 bis 14 Jahre alt) aus einer mathematisch überdurchschnittlichen Gruppe, die vom Autor unterrichtet wurde. Den Rahmen des Interviews bildete ein vorbereiteter Fragenkatalog, aber wenn die Klarheit es verlangte, wurden zusätzliche Fragen gestellt, ebenso wurden interessante Ansätze weiter verfolgt. Als Basis für die Befragung wurden Streichholzschachteln benutzt, auf die "Mittlerer Inhalt 35

Streichhölzer" gedruckt war, um die Fragen auf den alltäglichen Erfahrungsbereich der Schüler zu beziehen. Die Interviews wurden mit einem Recorder aufgezeichnet und später schriftlich notiert. Nach den ersten neun Interviews wurde der Fragenkatalog erweitert, um Gesichtspunkte aufzunehmen, die inzwischen neu aufgetreten waren. Am Ende jedes Interviews wurden die Schüler gebeten, ihre Antworten nicht mit anderen zu besprechen, "um niemandem einen unfairen Vorteil zu geben." Zu Beginn jedes Interviews wurden die Schüler gefragt, ob sie irgendeine Vorstellung hätten, worum es bei den Fragen ginge. Während der einzelnen Interviews wurde den Schülern nicht mitgeteilt, ob ihre Antwort richtig oder falsch war. Im Rahmen dieser Studie kann man so einigermaßen sicher sein, daß die Antworten der Schüler unabhängig von Absprachen oder speziellen Vorbereitungen waren.

Der Begriff "Mittelwert" wird auf sehr verschiedene Arten verwendet: als repräsentative Zahl, als Maß für die Lage und als erwarteter Wert. Die Schüler wurden gebeten, zunächst die Aussage über den mittleren Inhalt laut zu lesen und dann zu sagen, was sie bedeute. Von 17 Schülern gaben 15 eine Antwort wie "ungefähr 35 Streichhölzer in der Schachtel". Sie benutzten Formulierungen wie "grob geschätzt", "in etwa", "nicht genau", "um herum" und "nahe bei". Aus diesen Antworten schließen wir als evident, daß der dominante Bestandteil um Verständnis des Mittelwertes bei den Schülern das Maß für die Lage, der Lageparameter ist. Vier Schüler deuteten auch die Vorstellung des Erwartungswertes an mit Antworten wie "normalerweise" und "üblicher Betrag", ein Schüler benutzte das Wort "Mittelwert" und ein Schüler gab einen Hinweis auf eine Verteilung von Abweichungen, indem er sagte "vermutlich soviel, aber nicht immer". Die oben genannten Zahlen zeigen natürlich, daß einige Schüler mehr als eine Sorte Antworten gaben.

Um das Schülerverständnis zum Aspekt "Erwartungswert" beim Mittelwert zu klären, wurden die Schüler gebeten, auf den

Inhalt einer ungeöffneten Schachtel Streichhölzer hin, wie sie aus der Fabrik kommen, Wetten abzuschließen. Von den zehn Schülern, die darum gebeten wurden, wählte nur einer die 35. Nun kann man daraus wenig schließen, denn aus anderen Teilen des Interviews wurde deutlich, daß ihre Antworten mit Vorstellungen davon verbunden waren, wie der Abfüllprozeß in der Fabrik abläuft. Einige meinten, es würden weniger Hölzer eingefüllt, um den Profit zu erhöhen, andere meinten dagegen, beim Einfüllvorgang würden einige Hölzer danebenfallen. Was immer der Grund für die Antwort war, ein Verständnismangel zum Begriff "mittlerer Inhalt" ist festzuhalten.

Die Schüler wurden ferner gefragt, wieviele Streichhölzer sie insgesamt bei zehn Schachteln erwarten, so wie sie von der Fabrik kommen. In den meisten Fällen meinten die Schüler, es würden zusammen etwa 350 Hölzer sein. Sie wurden dann gefragt, zu vermuten um wieviel die Summe von 350 abweicht. Zwölf der siebzehn Schüler meinten, die Summe würde um mehr als 10 abweichen, bei der anschließenden Frage, welche Differenz zu 35 sie in einer einzelnen Schachtel vermuten würden, reichten die Antworten von "eins oder zwei" bis "fünf", und in einem Fall "zehn". Die Schüler können offenbar nicht einschätzen, daß die Stichprobenverteilung einer größeren Stichprobe offenbar nicht eine "proportionale breitere" ist, da die relativ seltenen Fälle großer Abweichungen vom Mittelwert durch die häufigeren kleinen Abweichungen davon ausgeglichen werden. Sie haben kein Verständnis von dem, was PIAGET und INHELDER (3) die "Rolle großer Zahlen" nennen. Auch hier könnte man die Antworten aus dem Kontext der Fragen heraus relativieren, aber selbst dann ist als wesentlicher Punkt festzuhalten, daß die Schüler kein voll ausgeprägtes Verständnis des Wortes "Mittelwert" haben.

Einer der Gründe dafür, daß die Schüler den Verteilungseffekt bei einer großen Anzahl von Schachteln nicht zulassen, mag darin bestehen, daß sie in allen

Schachteln dieselbe Anzahl von Zündhölzern finden und den "mittleren Inhalt" lediglich als Hinweis auf diese Anzahl und nicht als beschreibende Größe eines stochastischen Prozesses ansehen. Um diesen Ansatz in den weiteren Interviewfragen verfolgen zu können, wurde dem Katalog eine Frage beigefügt, in der die Schüler aufgefordert wurden, eine hypothetische Verteilung der Inhalte von einhundert Schachteln anzugeben, so wie sie aus der Fabrik kommen. Tabelle 1 zeigt die von den Schülern erdachten Verteilungen im Detail, es wurden acht Schüler gebeten, dieses zusammen mit ihren anderen Antworten anzugeben.

Diese Verteilungen legen die Vermutung nahe, daß die Schüler die Inhalte als variabel angesehen haben. Man beachte: Der Bereich von 30 bis 40 ist nicht als signifikant anzusehen, denn die Schüler erhielten eine Tabelle zur Ergänzung, in der dieser Bereich schon eingesetzt war, um ihnen deutlich zu machen, was hier gefragt war. Allerdings wurde ihnen gesagt, sich nicht von dem angegebenen Bereich beeinflussen zu lassen:

"Was wir möchten, ist, daß Du Zahlen angibst, die Du in der untersten Reihe der Tafel erwartest, wieviele der hundert Schachteln jeweils den genannten Inhalt haben...., Du brauchst nicht alle Felder auszufüllen, Du kannst ferner zusätzliche Zellen anfügen."

Vielleicht ist der bemerkenswerteste Aspekt dieser Verteilungen ihr Mangel an einer Form. Bei einer anderen Gelegenheit, bei der eine vierte Klasse von sehr guten Schülern (Sekundarstufe), dieselbe Frage vorgelegt erhielten, gaben fast alle Schüler eine symmetrische glockenförmige Verteilung an. Man erkennt hier, daß in der Situation, daß ein "Mittelwert 35" vorgelegt ist, der statistisch Versierte sofort von einer Verteilung ausgeht, die von einem stochastischen Prozeß herrührt, und daß man die Schüler einer dritten Klasse nicht als statistisch Verzierte bezeichnen kann, was die Bedeutung des Mittelwertes betrifft.

Tabelle 1 : Antworten der acht Schüler, die Verteilungen erfinden sollten, auf sämtliche Fragen

Schüler	Verteilung bei 100 Schachteln										Wette	Bereich	Verständnis der Bezeichnung "mittlerer Inhalt"		
	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39				40	
A	5		2	7	10	50	10	7	2	1	5	35	35 ± 1	350 ± 10	"grob"
B				20	50	10	30					34	35 ± 2	350 ± 10	"nicht alle 35"
C	3		2	3	5	12	15	12	4	25	17	38	30 / 40	300 / 375	"in etwa"
D			10			40		15		30	5	39,40	35 ± 10	400 , 450	"in etwa"
E	20	19	20	15	10	5	6	2	1	1	1	29	35 ± 5	350 ± 30	"nicht immer, grob"
F	1			9	9	80	1					33,34	32 / 37	340 ± 10,15	"in der Regel, ungefähr"
G	8	25		40		20	5	2			2	34	?	350 ± 15	"so um .. herum"
H				3	10	60	20	5	2			36	35 ± 1,2	360,357,359	"nicht genau"

Obwohl die Schülergruppe hier keine zufällig gewählte Stichprobe darstellt, und, wie bereits dargelegt wurde, der Kontext der Fragen die Antworten möglicherweise beeinflusst hat, gibt es hinreichende Einsicht, um vorsichtige Hypothesen zu formulieren. Es erscheint, als ob die Schüler einer dritten Klasse, die an anderer Stelle in dem Interview gezeigt haben, daß sie imstande sind, den Mittelwert einer Datenserie zu berechnen, und zudem mit der Bezeichnung "Mittelwert" vertraut sind, den Mittelwert nicht als Maßzahl eines stochastischen Prozesses verstehen. Dies paßt zu den von BARR, MEVARECH, POLLATSEK und anderen früher berichteten Ergebnissen. Die Schüler zeigen kein Verständnis für die volle Bedeutung des Begriffes "Mittelwert". Diese Einsicht erscheint hinreichend zwingend, um weitere deutlichere Forschung zu fordern.

Es gibt Folgerungen, die Lehrer bei ihrer geplanten Behandlung von Mittelwerten in Betracht ziehen sollten. Es ist nicht hinreichend, den Mittelwert oder andere Mittelwertmaße nur als beschreibenden Größen für gegebene oder selbst gefundene Verteilungen zu betrachten, die Schüler benötigen auch Erfahrungen in der Aufgabe, unbekannte Datenserien auf der Basis derartiger Parameter oder anderer Daten, die sie haben, zu interpretieren. Die Vorstellungen von "Repräsentativem" und "Erwartung" sind mit aufzunehmen. Ein Gefühl für stochastische Prozesse und die resultierenden Verteilungen muß zusammen mit der Vorstellung vermittelt werden, daß ein festgelegter Mittelwert ein Maß für eine Verteilung ist. Die Schüler sollten viel Erfahrung darin bekommen, mit wirklichen Daten zu arbeiten, die sie in einem Zufallsprozeß selbst erzeugt haben. Lehrer können nicht erwarten, daß die Schüler "en passant" die wesentlichen Kennzeichen von Verteilungen aufnehmen oder den Einfluß "der großen Zahlen" einsehen; diese Dinge müssen mit den Schülern ausführlich besprochen werden. Andererseits sollten Schüler die Gelegenheit erhalten, in der Klasse zu erwägen und zu diskutieren, was mit dem Wort "Mittelwert" gemeint ist, wenn es in verschiedenen Zusammenhängen

auftritt. Man sollte sie auffordern, den Gebrauch des Wortes in den Medien oder sonstwo zu beobachten. Jeder Lehrer hätte Nutzen von einem Notizbuch zum Gebrauch und Mißbrauch von Statistik, die ihm und seinen Schülern im täglichen Leben begegnen. Dies wäre eine reiche Quelle für Material, obwohl nichts so wirksam ist, wie das, was die Schüler selbst beitragen. Eine sinnvolle praktische Übung bestände darin, daß eine Gruppe von Schülern eine Datenserie erzeugt und sie mit einfachen statistischen Kenngrößen beschreibt, und eine andere Gruppe versucht, die Daten auf Grund der statistischen Aufgaben zu interpretieren, und schließlich die Ergebnisse mit den realen Daten vergleicht. Die Einheit "Cutting it Fine" in POSE (5) umfaßt eine Menge praktischer Übungen und Vorschläge für diese Arbeitsform. Bei allem dürfen wir nicht davon ausgehen, daß das Wort "Mittelwert", nur weil es im Sprachgebrauch seinen festen Platz hat, auch richtig vollständig verstanden wird.

Bemerkung

Der Autor dankt ANNE HAWKINS für ihre hilfreiche und konstruktive Kritik in dieser Untersuchung.

LITERATUR

- (1) BARR, G.V. (1980). Some Student Ideas on the Median and the Mode. *Teaching Statistics*, 2 (2), 38-41.
- (2) MEVARECH, Z.R. (1983). A DEEP STRUCTURE MODEL OF STUDENTS' STATISTICAL MISCONCEPTIONS. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.
- (3) PIAGET, J. and INHELDER, B. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children*, Routledge & Kegan Paul, London
- (4) POLLATSEK, A., LIMA, S. and WELL, A.D. (1981). CONCEPT OR COMPUTATION: STUDENTS UNDERSTANDING OF THE MEAN. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204
- (5) Schools Council Project on Statistical Education (1980). *Teaching Statistics 11-16*, Foulsham Educational, Slough.