LESERBRIEF zum Aufsatz von V. Lindenau:
"Einfache Simulationsmodelle für Warteschlangen."
In: Stochastik in der Schule, Heft 3, 1988, S. 40-57.

H.Trauerstein, Schumannstraße 12, 4800 Bielefeld 1

Bielefeld, 11.4.89

Mit Interesse habe ich den Artikel von V. Lindenau gelesen, da auch ich der Meinung bin, daß Simulationstechniken mit Gewinn im Unterricht behandelt werden können. Der Autor stellt im Abschnitt 4 (S. 47 ff.) zwei für die Sek. I geeignete Simulationsmodelle M1 und M2 vor, mit denen sich näherungsweise poissonverteilte Kundenströme simulieren lassen. Vor einer weiteren naheliegenden Möglichkeit der Simulation, die der Autor auf S. 47 f. skizziert, warnt er jedoch nachdrücklich und erhebt warnend den pädagogischen Zeigefinger. Die vorgebrachten Bedenken sind nur solange berechtigt, wie der Lehrer, wie im Artikel angenommen, mit der Ankunftswahrscheinlichkeit argumentiert. Denn diese ist natürlich nicht proportional zur Länge des betrachteten Zeitintervalls, sonst würde man leicht Wahrscheinlichkeiten > 1 erhalten. Aber die Ankunftsrate ist proportional zur betrachteten Zeitspanne und mit Hilfe der Ankunftsrate läßt sich bei leicht abgewandelter Argumentation ein Modell M3 beschreiben, in dem man einen Kundenstrom simulieren kann, der näherungsweise ein Poissonstrom ist.

Simulationsmodell M3:

Gegeben sei die Ankunftsrate λ. Das heißt, daß wir im Mittel λ Kunden pro Zeiteinheit (ZE) erwarten, z.B. 6 Kunden pro Stunde. Beim Übergang zu einer anderen Zeiteinheit ändert sich die Ankunftsrate natürlich und zwar proportional zur Länge des gewählten Zeitintervalls. Wir zerlegen die gewählte Zeiteinheit (z.B. 1 Std.) in N disjunkte Teilintervalle T_i der Länge $\Delta t = 1/N$ ZE. Bei N = 60 ist in diesem Beispiel $\Delta t = 1$ Minute. Die Ankunftsrate in einem Teilintervall T_i ist dann $\lambda/N = \lambda \cdot \Delta t$, z.B. 1/10 Kunde

pro Minute. Das heißt, auf lange Sicht wird das arithmetische Mittel der pro Minute ankommenden Kunden 1/10 betragen.

Modellannahmen

(1) Die Ereignisse:" Im Teilintervall T_i ($i=1,\dots,N$) kommt (mindestens) ein Kunde" sind unabhängig. Das bedeutet praktisch, daß die Kunden unabhängig voneinander kommen. Beim Possionstrom wird die gleiche Modellannahme (für alle disjunkten Intervalle) gemacht.

(2) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem bestimmten Teilintervall T_i (mind.) ein Kunde kommt, ist für alle T_i gleichgroß. Auch diese Annahme wird beim Poissonstrom gemacht. Man fordert hier, daß die Ankunftswahrscheinlichkeiten in gleichlangen Intervallen gleich sind.

(3) In jedem Teilintervall T_i kommt höchstens 1 Kunde. Diese Annahme reduziert sich beim Poissonstrom auf die Forderung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß 2 oder mehr Kunden zum exakt gleichen Zeitpunkt kommen, ist 0.

Diese 3. Annahme wird man nur dann akzeptieren, wenn Δt sehr klein ist. Und zwar sollte N mindestens so groß gewählt werden, daß $\lambda/N \leqslant 1/10$ gilt.

Dann erscheint es allerdings vertretbar, wenn 2 in der Realität gleichzeitig (bzw. im selben Teilintervall) eintreffende Kunden im Modell durch 2 Kunden simuliert werden, die kurz nacheinander in 2 verschiedenen Teilintervallen eintreffen. Auf die durchschnittliche Länge der Warteschlange z.B. oder die durchschnittliche Wartezeit hat diese Abweichung des Modells von der Realität so gut wie keinen Einfluß.

Der im obigen Modell erzeugte Kundenstrom ist zwar wegen der Annahme (3) kein Poissonstrom, sondern eine Bernoullikette mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \lambda \cdot \Delta t$, und die Zwischenankunftszeiten sind nicht exponentiell verteilt, sondern geometrisch verteilt, aber beim Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ gehen die beiden diskreten Verteilungen in die entsprechneden stetigen Verteilungen über. Die Annäherung ist für $p \leq 1/10$ hinreichend gut.

Ich möchte nun noch einmal auf die von Herrn Lindenau auf Seite 48 geäußerten Bedenken zurückkommen. Die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \lambda \cdot \Delta t$ bei der Bernoullikette ist die Ankunftswahrscheinlichkeit für einen Kunden in einem Teilintervall T_i. Kürzere Intervalle als die T_i treten im Modell nicht auf und die Ankunftswahrscheinlichkeit für Intervalle mit einer vielfachen Länge von Δt sind nicht proportional zur Zeit. Betrachten wir ein Intervall I der Länge $2 \cdot \Delta t$, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens 1 Kunde im Intervall ankommt $1-(1-p)^2$, und das ist ungleich $2 \cdot p$ für $p > 0$.

Abschließend möchte ich feststellen, daß mir alle drei Modelle M1, M2 und M3 geeignet erscheinen, Kundenströme in der Sekundarstufe I zu simulieren. Auf die Vor- und Nachteile der einzelnen Modelle möchte ich an dieser Stelle nicht weiter eingehen. Welches Modell im Einzelfall zu Simulation herangezogen wird, dürfte weitgehend von den Vorkenntnissen der Schüler und von der Aufgabenstellung abhängen.

V. Lindenau: ERGÄNZENDE BEMERKUNGEN zu dem Artikel "Einfache Simulationsmodelle für Warteschlangen" (Stochastik in der Schule, Heft 3/1988)

Herr Rainer Schmidt aus Göttingen hat in einem Brief an die Redaktion darauf hingewiesen, daß die angegebenen Simulationsalgorithmen deutlich kleinere durchschnittliche Warteschlangenlängen liefern als die nach der Formel

$$\bar{L} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 - \mu\lambda}$$

für das (M;M;1)-Bedienungsmodell berechneten.

Zu diesem völlig richtigen Einwand möchte ich Stellung nehmen:

Die schlechten Simulationsergebnisse haben ihre Ursache zunächst einmal darin, daß jedes der beiden angegebenen Simulationsmodelle vom (M;M;1)-Bedienungsmodell in wesentlichen Punkten abweicht. So wird im ersten Modell angenommen, daß die Kunden gruppenweise und mit konstanter Bedienungszeit bedient werden, und im zweiten Modell wird unzulässigerweise von einer von vornherein feststehenden Gesamtkundenzahl ausgegangen, außerdem von einer konstanten Bedienungszeit.

Trotzdem ist - zumindest beim ersten Simulationsalgorithmus - die Übereinstimmung der sich ergebenden Warteschlangenlänge mit der für das (M;M;1)-Bedienungsmodell berechneten sogar recht gut: man muß nämlich, wenn man diesen Vergleich vornimmt, die auf Seite 51 des Textes erwähnte Wartezeit der Kunden in ihrem Ankunftszeitintervall berücksichtigen; dadurch erhöht sich die Warteschlangenlänge im Durchschnitt um $\lambda/2$:

a zu dem Beispiel von Seite 52 oben gehören die Ankunftsrate $\lambda = 5$ und die Bedienungsrate $\mu = 6$; es ist also $\lambda/2 = 2.5$; die Simulation hatte als (zusätzliche) durchschnittliche Länge der Warteschlange den Wert 1.4 ergeben, also