

STATISTIK IN DER OBERSTUFE

von Carolyn Maher und John Pancari, New Jersey, USA.

Übersetzte und leicht veränderte Fassung von E. Gebhardt und M. Kilian

Zusammenfassung: Explorative Datenanalysen liefern mächtige numerische und graphische Werkzeuge zur Darstellung und Interpretation von Daten. In diesem Artikel beschreiben die Autoren ihre Zusammenarbeit mit Schülern bei einem physikalischen Experiment mit statistischen Methoden.

1. Hintergrund

Bedeutende Fortschritte in den Wissenschaften und in der Mathematik und deren wachsende Relevanz für die modernen Gesellschaften verlangen eine deutliche Reform der Schulcurricula. Immer wieder zeigen uns neue Entdeckungen in diesen Gebieten sinnvolle Anwendungen bei der Lösung praktischer Probleme. Menschen betreiben Wissenschaft und setzen in diesem Prozeß häufig Mathematik ein. Zu oft wird dagegen in den weiterbildenden Schulen die aktive Teilnahme der Lernenden beim Entdeckungsprozeß zu Gunsten der Einprägung von Regeln und der wiederholten Anwendung von Methoden vernachlässigt (Davis, 1984). Die Konsequenz ist, daß die Schüler in der Anwendung von Techniken geübt sein mögen, aber ihnen ein tieferes Verständnis fehlt. Auf grund dieser Umstände sollte auch der Mathematikunterricht in den Sekundarstufen I und II im Sinne des "Entdeckenden Lernens" weiterentwickelt werden.

Elemente der Statistik werden, im Rahmen des Statistikuterrichts, empfohlen als eine Möglichkeit, sinnvolle Untersuchungen in Mathematik und in den Natur- und Sozialwissenschaften zu initiieren. Ein zentraler Punkt bei allen solchen Empfehlungen ist, daß die Unterrichtsgegenstände durch die Erhebung oder Darstellung von realen Daten entwickelt werden sollen. Die anschließende Analyse dieser Daten soll in einem Prozeß von Fragen und Antworten entstehen. Dabei sollen verschiedene Arten der Darstellung entwickelt werden und die Vielfalt der möglichen Lösungswege besonders betrachtet werden.

2. Das Ziel

Zu vielen Laborversuchen im naturwissenschaftlichen Unterricht in der Sekundarstufe I und II gehört die Sammlung von Daten. In diesem Bericht wird ein Beispiel beschrieben, bei dem Schüler aktiv bei der Interpretation von physikalischen Daten durch den Einsatz der Explorativen Datenanalyse (EDA) mit einbezogen wurden. Die üblichen Praktika verlangen von den Schülern häufig nur Versuche durchzuführen und die Ergebnisse zu referieren. Oft sollen die Schüler dann ihre Ergebnisse mit der oder den betrachteten Theorien in Zusammenhang bringen und mögliche Fehlerquellen ihrer Experimente angeben. Bei naturwissenschaftlichen Experimenten müssen drei Fehlerarten unterschieden werden: (1) zufällige Fehler, (2) Meßungenauigkeiten und (3) systematische Fehler. Die Meßungenauigkeiten und die systematischen Fehler können durch bessere Geräte und genauere Messungen reduziert werden. Zufällige Fehler, die durch eine Menge von unkontrollierbaren zufälligen Faktoren verursacht werden, können durch die Verwendung von Mittelwerten und dergleichen reduziert werden. Bei der folgenden Datenanalyse werden einige von diesen Methoden vorgestellt. Zusätzlich zur Berechnung von Kenngrößen liefert die graphische Darstellung von Daten wertvolle Einblicke und Hypothesen für weitere Untersuchungen. Die hier vorgestellte statistische Exploration der von den Schülern gesammelten Daten beginnt dort, wo die üblichen Laborversuche enden.

3. Das Problem

Bei einem Experiment zur Messung der Beschleunigung eines fallenden Körpers durch die Erdanziehungskraft arbeiteten Schüler eines Physikkurses der St. Josephs High School in Hammonton, N.J. mit Wissenschaftlern des Franklin Institutes in Philadelphia, Pa. zusammen. Vier verschiedene Geräte wurden für diesen Zweck verwendet.

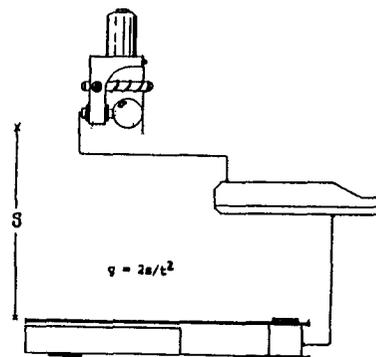
1. Freier Fall (vgl. Figur 1):

Dieses Gerät mißt die Beschleunigung g beim freiem Fall, $g = 2s/t^2$ gilt und s der Abstand zwischen der Unterseite des Balls und der Rezeptorplatte ist und t die Zeit. Bei diesem Versuch wurden der Abstand und die Zeit von den Schülern gemessen.

2. Schiefe Ebene (vgl. Figur 2):

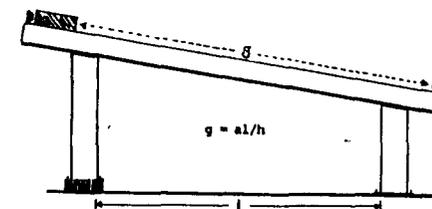
Bei der schiefen Ebene gilt $g = al/h$, wobei $a = 2s/t^2$ die Beschleunigung entlang der Ebene ist. Die Strecke, die der Gleiter zurücklegt wird mit s bezeichnet. Hier wurden die Zeit t gemessen und ebenso die Höhe h und die Länge l der Ebene.

Abbildung 1:



Freier Fall

Abbildung 2:



Schiefe Ebene

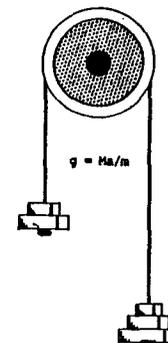
3. Die Atwoodsche Fallmaschine (vgl. Figur 3 und Anhang):

Bei der "Atwood" Maschine ist $g = Ma/m$, wobei M die gemessene gesamte Masse ist, m die berechnete Differenz der Massen und a die Beschleunigung des Systems, die wie bei der schiefen Ebene durch $a = 2s/t^2$ bestimmt wird.

4. Pendel (vgl. Figur 4):

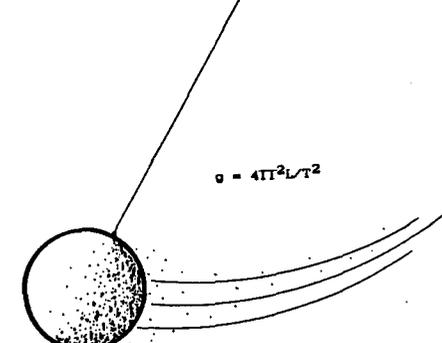
Beim Pendel gilt $g = 4\pi^2L/T^2$, wobei L der (gegebene) Abstand zwischen dem Befestigungspunkt und der Mitte der Kugel ist und T die gemessene Zeit für eine Schwingung.

Abbildung 3:



Atwood Gerät

Abbildung 4:



Pendel

Die Schüler bildeten vier Gruppen. Jede Gruppe führte vier Versuche, an jedem Gerät einen, durch. Während des Experiments wurden nur die direkten Messungen vorgenommen und erst anschließend wurden die mathematischen Berechnungen durchgeführt. Mit den Ergebnissen dieser Messungen konnten 16 Schätzungen für g für jedes Gerät berechnet werden. Die Schätzwerte befinden sich in Tabelle 1.

Die Schüler hatten zusätzlich zur Protokollierung der Messungen folgende Aufgaben:

1. Für jede Versuchsanordnung g mit der entsprechenden Funktion zu berechnen,
2. mögliche Fehlerquellen zu diskutieren und
3. das Gerät mit der besten Schätzung für g zu bestimmen.

Tabelle 1: Die Daten

Versuch	Freier Fall	Schiefe Ebene	Atwood	Pendel
1	9.97	10.90	9.60	10.18
2	9.84	10.64	9.71	10.08
3	9.80	11.37	9.71	9.78
4	9.81	10.06	10.62	9.83
5	9.80	10.16	10.12	10.13
6	9.80	10.16	11.27	9.95
7	9.81	9.76	9.42	9.82
8	9.81	10.55	9.50	10.12
9	9.88	10.30	9.33	9.96
10	9.97	10.05	9.48	9.97
11	9.79	10.76	10.16	9.80
12	9.81	10.31	10.63	9.81
13	9.78	11.66	11.13	9.83
14	9.80	9.91	10.48	9.73
15	9.87	9.25	9.94	9.82
16	9.81	10.13	9.07	9.84

4. Die Analyse der Daten und Schlußfolgerungen

Die zahlenmäßigen Kenngrößen, die für die Analyse der von den Schülern gesammelten Daten verwendet wurden, waren der Median als ein Maß für die Lage der Meßwerte und der Viertelwertsabstand (Interquartilsabstand d) als ein Maß der Streuung (ungefähr 50 % der Daten liegen innerhalb dieser Spanne). Merkmalswerte, die ungewöhnlich weit von der Mitte entfernt sind, wurden als "Ausreißer" betrachtet. Ein Ausreißer wurde definiert als ein Punkt, der entweder mehr als 1.5 d von dem unterem oder von dem oberem Quartil entfernt ist. Die

Kenngrößen der betrachteten Daten stellt Tabelle 2 dar.

Tabelle 2: Kenngrößen

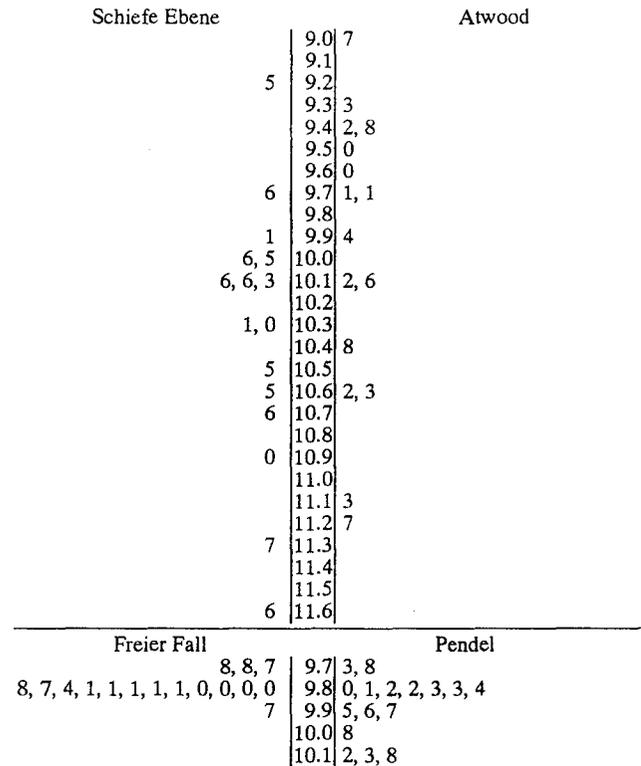
	Freier Fall	Schiefe Ebene	Atwood	Pendel
Oberes Quartil	9.855	10.705	10.55	10.025
Median	9.81	10.23	9.825	9.835
Unteres Quartil	9.80	10.055	9.49	9.815
Interquartilsabstand	0.55	0.650	1.06	0.210
Ausreißer	9.97, 9.97	-	-	-

Eine Untersuchung der bisher vorgetellten Kenngrößen zeigt, daß die mit dem Median berechneten Näherungswerte für g beim freiem Fall, bei der Atwood Maschine und beim Pendel relativ nahe beieinander liegen. Die beobachteten Werte der schiefen Ebene unterscheiden sich erheblich von denen der anderen Versuchsanordnungen. Bei der Betrachtung der Streuung zeigte sich, daß die Beobachtungen beim freiem Fall am wenigsten streuen, aber zwei Ausreißer vorliegen. Das Pendel erzeugte ebenfalls eine geringe Streuung der Meßwerte. Man beachte, daß der beim freiem Fall zweimal gemessene Wert von 9.97 ein Ausreißer war, wohingegen die Werte 9.78 und 9.73 beim Pendel keine Ausreißer sind. Die Beobachtungen beim freiem Fall den sehr kleinen Interquartilsabstand von 0.055 aufweisen und damit eine geringe Streuung, und infolgedessen besitzt der Ausreißertest hier eine größere Trennschärfe als für die Daten des Pendels mit einer größeren Streuung und einem Interquartilsabstand von 0.210.

Außer der Berechnung der Kenngrößen der Daten liefern auch graphische Methoden wie "zweiseitige Stamm-und-Blatt" Darstellungen (engl. :side-by-side stem-and-leaf plots) und Kastendiagramme (engl. : boxplots) übersichtliche Darstellungen der beobachteten Daten. Solche Darstellungen liefern die charakteristischen Eigenschaften der Beobachtungsreihe wie das Zentrum, Streuung, Lokalisation von Ausreißern und die empirische Verteilungsform. Oft können diese Kenngrößen durch eine einfache visuelle Analyse der Diagramme bestimmt werden.

Zur Erstellung der ersten Stamm-und-Blatt Darstellung verwendeten die Schüler die Daten der schiefen Ebene und der Atwood Maschine, da beide Beobachtungsreihen eine relativ große Streuung besitzen. Für das zweite Diagramm wurden die Daten des freien Falls und des Pendels wegen ihrer geringen Streuung kombiniert. Als nächstes wurden die ersten beiden Ziffern aller Beobachtungswerte als "Stamm" und die letzte Ziffer als "Blätter" an einer vertikalen Skala dargestellt. Die Werte der schiefen Ebene und des freien Falls befinden sich auf der linken Seite der Diagramme, die Werte der Atwood Maschine und des Pendels auf der rechten Seite, wie Abbildung 5 zeigt.

Abbildung 5: Stamm-und-Blatt Darstellung

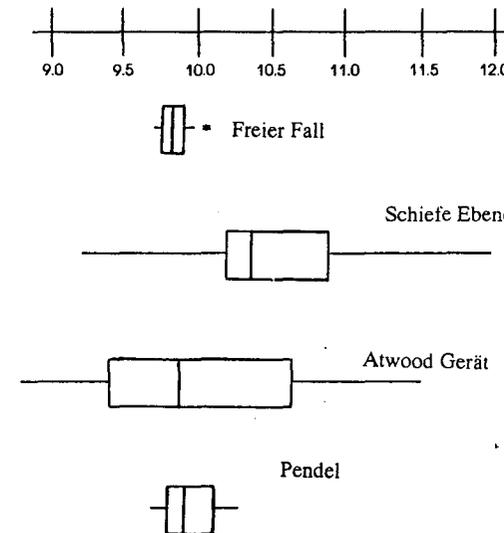


Die obigen Diagramme zeigen dem Betrachter die Lage, die Verteilung im allgemeinen und die Streuung der jeweiligen Daten. Das Diagramm für die Daten aus dem freien Fall zeigt, nicht nur die Lage (angenähert zentral) in dem Bereich von 9.8 m/s^2 , sondern auch eine starke Häufung um dieses Zentrum. Das Diagramm für die Pendeldaten zeigt eine weniger konzentrierte Lage der Daten und sie sind auch weniger stark zusammengepackt. Die Daten von der schiefen Ebene scheinen einen Schwerpunkt im Bereich von 10.1 m/s^2 zu haben, bei viel geringerer Konzentration (Häufung der Daten). Die Atwood Daten sind breit gestreut, ohne Häufung an irgendeiner Stelle.

Zur Konstruktion der Kastendiagramme für einen Vergleich der Beobachtungsreihen wurden zuerst Rechtecke unterhalb einer Skala, die alle Beobachtungen umfaßt, gezeichnet.

gezeichnet. Die linke vertikale Seite der Rechtecke entspricht dem unterem Quartil und die rechte vertikale Seite dem oberem Quartil. Die Mediane werden durch vertikale Linien innerhalb der Rechtecke dargestellt. Dann werden noch Verlängerungslinien rechts und links der Rechtecke bis zu den Extremwerte gezogen, vorausgesetzt diese sind keine Ausreißer. Die Ausreißer werden durch einen Stern markiert, wie Abbildung 6 zeigt.

Abbildung 6: Kastenzzeichnungen zum Vergleich der Beobachtungsreihen



Bemerkung: Ungefähr 50% der Daten befinden sich innerhalb der Kästen, der Rest liegt auf den Verlängerungslinien oder ist als Ausreißer dargestellt. Deshalb spiegeln relativ schmale Rechtecke mit kurzen Verlängerungslinien eine geringe Streuung wieder. Auch hier ist es recht offensichtlich, daß die Daten des freien Falls am stärksten zusammenklumpen gefolgt von denen des Pendels. Die Schüler bemerkten, daß das Atwoodgerät Daten erzeugt, deren Median nahe denen des freien Falls und des Pendels liegt. Währenddessen deren Streuung recht groß ist, was Anlaß zu der Vermutung gibt, daß hier die Schätzung für g relativ unzuverlässig ist.

5. Fragen für weitere Untersuchungen

Im Sinne eines echten Experiments wurde der Lehrbuchwert für g (9.81 m/s^2) den Schülern nicht angegeben. Einige wichtige Fragen, die mit Hilfe der obigen numerischen und graphischen Auswertung beantwortet werden sollten, sind:

1. Welche Versuchsanordnung liefert die beste Schätzung für g und warum?
2. Welche Faktoren tragen zu einer großen bzw. kleinen Streuung in jedem Datensatz bei?
3. Welche Faktoren könnten die Existenz von Ausreißern erklären?
4. Wie kann der Lehrbuchwert von 9.81 m/s^2 damit in Einklang gebracht werden, daß jedes Gerät andere Resultate liefert?

Diese Fragen sind Erweiterungen derer, die am Anfang des Experiments gestellt wurden. Hauptsächlich entstanden diese Frage infolge der durch die explorative Datenanalyse gewonnenen Einsichten. Jede dieser Fragen wie auch andere können als Hypothesen für weitere Untersuchungen dienen. Bei diesem auf der Auswertung von echtem Datenmaterial beruhendem Unterricht ist es möglich, daß die Lösung von interessanten Problemen zu bedeutungsvollen Schülerentdeckungen führen kann.

Unser Dank gilt dem Rutgers University Center für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik für ihre Unterstützung bei dieser Arbeit, John Donato und John Baglivio für ihre Hilfe bei der Erstellung der Graphiken und den Schülern der St. Joseph High School für ihre Kooperation und ihren Enthusiasmus.

Anhang

Atwoodsche Fallmaschine: Apparat zur Demonstration der Fallgesetze, bei dem die Fallbeschleunigung beliebig verringert werden kann. Über eine leicht drehbare Rolle hängt ein Faden, an dessen beiden Enden zwei gleich schwere Gewichte mit der gesamten Masse M_1 befestigt sind, so daß zunächst Gleichgewicht herrscht. Wird nun eines der beiden Gewichte mit einem Zusatzgewicht der Masse m belastet, so bewegt sich dieses Gewicht gleichförmig beschleunigt nach unten. Dabei wirkt als beschleunigende Kraft lediglich das Gewicht mg der Masse m , während die Gesamtmasse $M=M_1+m$ beschleunigt werden muß (der Einfluß des Trägheitsmomentes und der Achsenreibung der Rolle sowie das Gewicht des Fadens ist dabei vernachlässigt, kann aber bei genaueren Versuchen in die Rechnung einbezogen werden). Die auftretende Beschleunigung ist demnach:

$$a = \frac{m}{M} g$$

beträgt also nur einen kleinen Bruchteil der Erdbeschleunigung g und kann durch Verkleinerung von m nach Belieben verringert werden. Der durchlaufene Weg kann an einer Skala abgelesen werden. Um die in einem beliebigen Punkt P erreichte Geschwindigkeit zu messen, kann das Zusatzgewicht durch einen verstellbaren Ring in diesem Punkt abgehoben werden, so daß M sich von P ab mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegt, die dann leicht gemessen werden kann. Da auf diese Weise alle Größen bestimmt werden können, lassen sich die Fallgesetze mühelos demonstrieren. Die Atwoodsche Fallmaschine demonstriert gleichzeitig den Ablauf einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Sie kann auch dazu dienen, die Gültigkeit der dynamischen Grundgleichung zu zeigen (Lexikon der Physik, 1970).

Literatur

Davis, R. (1984): *Learning Mathematics*, Norwood, New Jersey, Ablex Publishing Co.

Lexikon der Physik Bd. 1 (1970), München, Deutscher Taschenbuch Verlag.

Maher, C. und Pancari, J. (1990): *Statistics in High School Science, Teaching Statistics* 12, S. 34-37.

National Council of Teachers of Mathematics Commission on Standards for School Mathematics (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA, The Council.

National Research Council (1989): *Everybody Counts*, Washington, D.C., National Academy Press.