

Ein Einstieg über das Drei-Türen-Problem

Ingo Klemisch, Bielefeld

Zusammenfassung: Der nachfolgende Erfahrungsbericht beschreibt einen experimentellen Einstieg in einen Stochastik-Leistungskurs der Oberstufe. Das dafür gewählte "Drei-Türen-Problem" (auch als "Ziegenproblem" bekannt) erwies sich als äußerst motivierend und führte den Kurs an eine Vielzahl stochastischer Fragestellungen heran. Besonders wichtig waren mir dabei die ersten Erfahrungen mit Simulationen und deren Auswertung.

Zu Beginn des Stochastik-Unterrichts in der SII (Grundkurs und Leistungskurs) versuche ich, den Schülerinnen (gemeint sind hier und im folgenden natürlich stets auch die männlichen Teilnehmer meines Kurses) mit Hilfe möglichst komplexer und anregender Situationen, die ihnen auch bei geringen Vorkenntnissen Gelegenheit zu großer Eigenaktivität bieten, einen nachhaltigen Eindruck der zu diesem Gebiet gehörenden Fragestellungen zu vermitteln. Schon in den ersten Unterrichtsstunden geht es mir dabei nicht um das Abarbeiten eines festen Unterrichtskonzeptes (bei dem die Schülerin nur den vom Lehrer vorgegebenen Weg nachvollzieht) sondern darum, daß die Schülerinnen selbst, d. h. durch eigene Vermutungen, Experimente und Diskussionen im Kurs den Unterrichtsgang weitgehend bestimmen. Die Rolle des Lehrers ist dabei mehr die eines Initiators, Infragestellers und Diskussionsleiters.

Angeregt durch eine Reihe von Zeitungsveröffentlichungen des Jahres 1991 (von Randow, 1991 a und b, Leserbriefe in "Die Zeit" 34/1991) und bestärkt durch den Vortrag von Bernd Wollring (1992), wollte ich meine Schülerinnen eines Leistungskurses diesmal intensiver für Simulationen interessieren.

Die erste Unterrichtsdoppelstunde zur Stochastik war durch Analysen des Galton-Brettes (vgl. Klemisch, 1985) bestimmt, bei denen sich zeigte, daß die Schülerinnen meines Kurses trotz sehr unterschiedlicher Vorgeschichte (hoher Anteil ehemaliger Realschülerinnen) recht einheitliche Vorkenntnisse im Bereich der Grundbegriffe der Stochastik besaßen, so daß schnell die Frage der Modellierung und Simulation des (theoretisch bereits verstandenen) Galton-Brett-Versuches im Vordergrund der Diskussionen standen.

Zu Beginn der folgenden Einzelstunde erhielten die Schülerinnen ein Arbeitsblatt zum Drei-Türen-Problem. Eine Nachfrage zeigte mir schnell, daß weder das Problem noch die Veröffentlichungen in "DIE ZEIT" im Kurs bekannt waren. Die Beschreibung des Spiels entstand in enger Anlehnung an Wollring (1992):

"Vielleicht ist Dir aus der Presse das "Drei-Türen-Problem" bekannt:

Ein Spieler steht vor drei Türen. Hinter einer steckt als Gewinn ein Auto (besser: eine Jahresnetzkarte der DB), hinter zweien als Nieten jeweils eine Ziege. Gespielt wird in vier Schritten:

S₀: Der Spielleiter setzt Auto und Ziegen für den Spieler unsichtbar hinter die Türen.

S₁: Der Spieler wählt eine der drei Türen. Alle Türen bleiben noch zu.

S₂: Der Spielleiter öffnet eine Tür, hinter der sich eine Ziege befindet, nicht jedoch die vom Spieler gewählte Tür.

S₃: Der Spieler kann nun die zuerst gewählte Tür beibehalten (Nichtwechsel) oder die andere geschlossene Tür wählen (Wechsel).

Problem: Ist seine Gewinnchance bei Nichtwechsel oder Wechsel höher?

- a) Bilde Dir spontan eine Meinung und notiere sie.
- b) Versuche nun, Deine Meinung zu begründen oder - evtl. in Diskussion mit Deinen Nachbar(inne)n zu widerlegen.
- c) Überlege Dir Möglichkeiten, dieses Spiel zu simulieren (Ziel: der Lösung experimentell näher kommen)."

Nach kurzer Bedenkzeit entschieden sich 21 Schülerinnen für "egal" (typische spontane Äußerungen waren: "Ist doch ganz klar!" oder "Zwei Türen ein Auto, da muß man doch nicht lange nachdenken."), eine Schülerin für "Wechsel ist besser". Sie gab allerdings sofort zu, rein emotional, d. h. ohne jede sachliche Überlegung entschieden zu haben, weshalb die unter b) vorgeschlagenen Diskussionen leider zunächst unterblieben. Man war sich i. w. einig, die Begründungen ähnelten sich, ihr Kern war stets die Aussage, daß bei zwei verbleibenden Türen "natürlich" hinter jeder mit gleicher Wahrscheinlichkeit das Auto oder die zweite Ziege stecken könne.

Da ich auf den Streit in der ZEIT 1991 hinwies und zusätzlich andeutete, daß sich auch Professoren der Mathematik falsch entschieden hatten, war die Motivation im Kurs sofort äußerst groß, sich trotz der Übereinstimmung im Vorurteil, mit Simulationen des Spiels zu beschäftigen. Dazu bildeten sich sechs Gruppen.

Allen gemeinsam war, daß im ersten Ansatz versucht wurde, das Spiel in allen Phasen getreu der Beschreibung nachzuspielen und vollständig zu protokollieren. In einigen Gruppen traten dabei Ergebnisse auf, die den Schülerinnen unwahrscheinlich vorkamen, so daß Forderungen nach unbeeinflussten Zufallsmechanismen, die die Person des Spielleiters bzw. Spielers ersetzen sollten, laut wurden.

Von nun an entwickelten sich die Gruppen sehr unterschiedlich weiter, als Zufallsgeräte wurden Spielkarten, Streichhölzer u. ä. benutzt, die jeweilige Spielsituation meist durch Zeichnungen dargestellt. Eine Gruppe baute sich ein Spielfeld mit zufällig für ein Kunstprojekt mitgebrachten Materialien auf (das Auto z. B. war eine große Büroklammer mit vier Pfennigstücken).

- Vier Gruppen wählten die wohl naheliegendste Simulationsstrategie, zunächst die Position des Autos und die Erstwahl des Spielers auszulösen und anschließend die vom Spielleiter zu öffnende Tür direkt zu bestimmen. In

den ersten Simulationsrunden wurde dann jeweils gelost, ob gewechselt werden sollte oder nicht, die Schülerinnen wollten damit evtl. vorhandene Verhaltenspräferenzen bei den Gruppenmitgliedern ausschalten. Protokolliert wurde in diesen Gruppen die Ausgangssituation, die Erstwahl, die geöffnete Tür, das Wechselverhalten und der Erfolg.

Recht schnell erkannten dann einige Schülerinnen die Komplementarität der Ereignisse "Erfolg"/"Nichterfolg" bezüglich des Verhaltens "Wechsel"/"Nichtwechsel", werteten ihre Protokolle entsprechend "doppelt" aus und verzichteten schließlich auch auf das Auslösen des Wechselverhaltens.

- Die Gruppe (Nr. 5) mit dem selbstgebauten Spielfeld war bald darauf aus, ihre Simulationen zu beschleunigen. Der erste Schritt dazu war, zu einer festen Anfangssituation (konstante Anordnung des Autos und der Ziegen) überzugehen. Gewürfelt wurde dann die Erstwahl des Spielers (Zwischenproblem der Gruppe: Wie simuliert man einen Würfel?), eine Schülerin zeigte anschließend auf eine Ziege, eine weitere protokollierte lediglich "Erfolg" oder "Nichterfolg" bei Nichtwechsel der Tür (auch diese Gruppe nutzte also die Komplementarität aus).

Als die Gruppen am Ende der Stunde ihre Methoden einander vorstellten, ergab sich eine heftige Diskussion um die Idee der festen Ausgangssituation, die schließlich eine Schülerin dadurch beendete, daß sie sehr einsichtig die "Unabhängigkeit" der beiden ersten Spielschritte demonstrierte.

- Die Schülerinnen in der sechsten Gruppe fielen zunächst dadurch auf, daß sie keine Anstalten trafen, zu spielen. Sie diskutierten vielmehr mehrfach mit den Schülerinnen der Gruppe 5, arbeiteten mit Papier und Bleistift und erklärten mir auf meine Nachfrage, sie wollten ein Computerprogramm zur Simulation entwickeln.

Am Ende dieser Stunde wurde für die kommende Doppelstunde die Durchführung der Simulationen in den einzelnen Gruppen verabredet, bis dahin sollten die nötigen Materialien (Zufallsgeräte), Protokollformulare bzw. das Computerprogramm vorbereitet werden.

Am Anfang der nächsten Stunde zeigte sich zunächst, wie sehr die Schülerinnen durch das Problem motiviert worden waren. Etliche hatten sich zu Hause damit beschäftigt, einige dabei ihr ursprüngliches Urteil revidiert, so daß nun die zunächst unterbliebene (s. o.) Diskussion nachgeholt wurde. Nachdem schließlich eine Schülerin folgendermaßen argumentierte:

"Zu Beginn beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Auto hinter der gewählten Tür steht $1/3$ dafür, daß es hinter einer der beiden anderen Türen steht, jedoch $2/3$. Wenn von diesen beiden Türen eine ausscheidet, bleibt die Wahrscheinlichkeit für die gewählte Tür $1/3$ (hier hat sich ja nichts

verändert), folglich muß die Wahrscheinlichkeit für die andere Tür 2/3 betragen. In 2/3 aller Fälle ist also Wechsel besser als Nichtwechsel."

waren alle von dieser Lösung überzeugt. Bei der folgenden Durchführung der Simulationen ging es ihnen nun nicht mehr darum, eine Lösung zu finden, sie waren jetzt neugierig darauf, wie die Simulationen die "Wahrheit" abbilden würden.

Nachstehend sind die Ergebnisse der Simulationsphase (ca. 20 Minuten) der Gruppen 1 - 5 dargestellt:

| Nummer der Gruppe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------------|----|----|----|----|-----|
| Anzahl der Simulationen: | 32 | 60 | 47 | 49 | 239 |
| Gewinn bei Wechsel: | 19 | 36 | 24 | 30 | 158 |
| Gewinn bei Nichtwechsel: | 13 | 24 | 23 | 19 | 81 |

Obwohl sich nur bei Gruppe 5 ein Verhältnis von annähernd 1:2 eingestellt hatte, sahen zunächst ausnahmslos alle Schülerinnen diese Ergebnisse als volle Bestätigung ihrer Lösung an. Sie hatten ihr Hauptaugenmerk darauf gerichtet, daß in der ersten Ergebniszeile größere Zahlen stehen als in der zweiten Zeile und die qualitative Feststellung "Wechsel ist besser" hatte für sie eine größere Bedeutung als die zugehörige quantitative Aussage. Entsprechend verblüfft reagierten sie zunächst auf meine Frage, wie sie denn am Tag zuvor auf Spalte 3 reagiert hätten und traten dann in eine heftige Diskussion über die Auswertung von Ergebnissen von Zufallsexperimenten ein, in der (auf intuitiver Basis) sowohl Überlegungen zum Gesetz der großen Zahl als auch Verträglichkeitsfragen eine Rolle spielten.

In der sich unmittelbar anschließenden dritten Stunde wollten nun noch alle Kursteilnehmerinnen die Computersimulation verfolgen. Die Ergebnisse waren beeindruckend: Schon bei 500 Simulationen unterschieden sich die ermittelten Prozentzahlen (Beispiel: 32,8 % für "Nichtwechsel", 67,2 % für "Wechsel") nur wenig vom erwarteten Wert. Die Programmiererinnen hatten allerdings mit minimalem Bildschirm-Layout gearbeitet (Eingabe: Anzahl der Versuche; Ausgabe: Zahl der Erfolge bei Nichtwechsel und Zahl der Erfolge bei Wechsel und jeweils zugehöriger Prozentsatz) und wurden nun bedrängt, ihre "Black-Box" zu öffnen und nachzuweisen, daß ihre Simulation den Zufallsversuch tatsächlich nachbildet (eine heilsame Erfahrung, da sie - wie viele Computerfreaks - ihre Arbeit mit der Erstellung des Programms für erledigt gehalten hatten).

Anstelle des von den Schülerinnen erstellten ELAN-Programmes gebe ich hier den von ihnen verwendeten Algorithmus an:

- 1 eingabe der anzahl der simulationen;
- 2 WIEDERHOLE
- 3 ermittle autotür durch zufallsgenerator;
- 4 ermittle gewählte tür durch zufallsgenerator;
- 5 FALLS gewählte tür = autotür
- 6 DANN erhöhe zähler für nichtwechsel um eins
- 7 ANDERNFALLS erhöhe zähler für wechsel um eins;
- 8 BIS anzahl der simulationen erreicht;
- 9 berechne relative häufigkeiten der erfolge bei wechsel und nichtwechsel;
- 10 ausgabe der relativen häufigkeiten als prozentzahlen.

Bei der Analyse des Programms durch den Kurs (dabei beteiligten sich auch die Schülerinnen, die nicht Informatik belegt haben) wiederholten sich Teile der Diskussion vom Vortrag und der Kurs stellte fest, daß man (analog zum Vorgehen der Gruppe 5) die Programmzeile 3 durch eine konstante Setzung der "autotür" ersetzen kann. Eine zentrale Frage war dann die nach der Funktionsweise der im ELAN-Programm in den Zeilen 3 und 4 verwendeten Prozedur "random": Dazu ließen wir uns von den Computer"spezialistinnen" die Arbeitsweise unterschiedlicher Zufallsgeneratoren erklären und änderten dann das Programm so ab, daß es für eine Reihe von kurzen Versuchsserien die Nummer der gewählten Tür ausdrückte, um zu überprüfen, ob der ELAN-Zufallsgenerator nicht nach jedem Programmstart die gleiche Zahlenfolge liefert.

Fazit:

Drei mal 45 Minuten zum 3-Türen-Problem haben meine Schülerinnen vorwiegend über ihre eigene Initiative an eine Reihe von Fragestellungen der Stochastik herangeführt, ihr Problembewußtsein und ihre Motivation zum Erwerb von Hintergrundwissen gefördert und ihre Kritikfähigkeit gegenüber Ergebnissen elektronischer Datenverarbeitung verstärkt.

Nachtrag:

Eine Schülerin aus der "Computergruppe" hat in den Sommerferien, die unmittelbar nach den geschilderten Unterrichtsstunden begannen, nach einem Streitgespräch mit einem promovierten Mathematiker (dieser bestand auf gleicher Gewinnchance bei Wechsel wie Nichtwechsel) einen siebenseitigen "Mathematischen Aufsatz" (Titel: "Lösungsversuch des Ziegenproblems") verfaßt. Bei der Suche nach überzeugenden Argumenten ist sie auf das gerade erschienene Buch (von Randow, 1992) gestoßen und hat sehr erfolgreich versucht, die dort veröffentlichte Lösung in ihre Sprache zu übersetzen.

Literatur

von Randow, Gero: Eingebung nützt nichts. Die Zeit, 30/1991(a).

von Randow, Gero: Eine überzeugende Logik. Die Zeit, 34/1991(b).

Leserbriefe. In: Die Zeit, 33/1991.

Wollring, Bernd: Schülerversuche zur Wahrscheinlichkeit. Simulationen zum Drei-Türen-Problem - erste Evaluation. Vortragsmanuskript zur GDM-Tagung, Weingarten 1992, Vortrag in Bielefeld am 2.6.1992.

Klemisch, Ingo: Das Galton-Brett. Stochastik in der Schule 1/1985.

von Randow, Gero: Das Ziegenproblem. Reinbek bei Hamburg, 1992.

Ingo Klemisch, Bielefeld

