AIDS - Welche Aussagekraft hat ein "positives" Test-Ergebnis?

Heinz Boer, Appelhülsen

Zusammenfassung: Aids-Tests finden mit hoher Zuverlässigkeit Infizierte unter den Untersuchten und klassifizieren mit hoher Sicherheit Nicht-Infizierte als solche. Trotzdem bedeutet ein positives Testergebnis nur mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 9%, daß eine Infektion vorliegt! Der Sachverhalt wird hier aufgeklärt und ein doch brauchbarer Umgang mit dem Test vorgeschlagen.

Lesehinweise

Der Aufsatz ist so geschrieben, daß er als Abfolge in den Mathematikunterricht übernommen werden kann. Jeweils wird eine Fragestellung entwickelt und unter L die jeweilige Lösung dargelegt. Die Fragestellungen kann man verwenden für Arbeitsblätter oder als Unterrichtsleitfaden. Der Unterricht kann gut beginnen mit der Frage nach der Relevanz des Unterrichtsgegenstandes, nach der Relevanz von HIV-Testen. HIV-Test - das wäre die richtige Wortwahl für den hier bearbeiteten Gegenstand, da AIDS bekanntlich erst das Endstadium einer HIV-Infektion, nämlich die Erkrankung benennt. Aber im alltäglichen Sprachgebrauch wird der Test AIDS-Test genannt, obwohl der Sachverhalt bekannt ist. Diesem zwar unscharfen, aber üblichen Sprachgebrauch schließe ich mich in der Überschrift und im Text an.

Zur Relevanz der Fragestellung

Nach dem Seitensprung, nach dem sexuellen Kontakt ohne Kondom den AIDS-Test machen - das empfehlen großformatige Werbeanzeigen und vielmalige Fernsehwerbungen. Die öffentliche Thematisierung ist so breit, weil die Gefahr einer (tödlichen) Volksseuche zu befürchten ist. Zumindest in Bayern war sogar lange in der Diskussion, ob nicht die gesamte sexuell aktive Bevölkerung zum Test gezwungen wird oder zumindest Gruppierungen, die von Amts wegen benannt werden. AIDS ist eine bevölkerungspolitisch relevante Infektionskrankheit. Deshalb ist die Frage nach der Güte der AIDS-Tests für die Gesamtbevölkerung wichtig.

Das Testergebnis "positiv", das makabererweise die Diagnose AIDS-Infektion bezeichnet, hat massive Auswirkungen auf die gesamte weitere Lebensplanung der getesteten Person, auf den Umgang mit Kollegen, Verwandten und Bekannten. Vor allem hat die Diagnose einschneidende Wirkungen auf die Verhaltensweise der sozialen Umwelt gegenüber der als infiziert diagnostizierten Personen, sofern das Testergebnis bekannt wird.

AIDS ist eine für die betroffene Person lebensbedrohende Krankheit. Schon ein "positives" Testergebnis wirkt massiv auf das aktuelle Leben und die Lebensplanung der so diagnostizierten Person. Die Frage nach der Güte des Testes bekommt damit eine zentrale Bedeutung für das Individuum.

Welche Aussagekraft hat ein "positives" Testergebnis?

Um sich dieser Frage mit dem derzeit bekannten Vorwissen über die Tests zu nähern, hier zunächst einige Informationen aus einem Artikel von G. König über "AIDS und Mathematikunterricht" (König 1991).

"Wieviele Personen einer Gesellschaft sind überhaupt HIV-positiv? Hohe Schätzungen sprechen von 0,02% bis 2% (Großraum New York). Das Bundesgesundheitsamt verzeichnet zum 31.12.1990 für die Bundesrepublik Deutschland unter Ausschluß erkennbarer Doppelmeldungen insgesamt 42.744 HIV-positive Seren (Koch et al. 1991, S. 10). Einige Fälle werden nicht erkannt sein, so daß eine gute Schätzung der möglichen Infektionen auf ca. 50 000 kommt (ca. 30 000 bis 70 000, S. 157 AIDS-Forschung). Das ist nicht wenig, immerhin fast ein Promille der Gesamtbevölkerung. Wir beziehen uns nur auf die sexuelle aktive Bevölkerung und gehen dabei von den heute 18-60jährigen aus. Diese Gruppe umfaßt in Deutschland etwa 40 Millionen. Der Anteil der Infizierten beträgt also 0.1 - 0.2%; für die Rechnungen benutzen wir 0.1%. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig ausgewählte Person im sexuell aktiven Alter HIV-infiziert ist, sei also ... 0.001. Zu den anderen Daten: In neuerer Zeit sind sehr empfindliche Testverfahren entwickelt worden. Kommerzielle Tests sind eine Kombination von Suchtests und einem folgenden Bestätigungstest. Die Tests haben eine hohe Sensitivität und Spezifität. Mit einer hohen Wahrscheinlichkeit wird eine richtige Diagnose erstellt, d.h. wird eine Person untersucht, die HIV-infiziert ist, so sei die Wahrscheinlichkeit, daß sie als infiziert erkannt wird, 99.8%. ... = 0.998 (dies ist die sog. Sensitivität). Ähnlich gute Schätzungen ergeben sich für die sog. Testspezifität: 0.99. Die Gegenwahrscheinlichkeit ... 1.-0.99 ist die Wahrscheinlichkeit für ein (fälschlicherweise) positives Untersuchungsergebnis, unter der Bedingung, daß das betreffende Individuum in Wahrheit nicht infiziert ist. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.01 würde also ein Gesunder fälschlich als infiziert diagnostiziert werden. Also ein sehr guter Test, aber leider kein perfekter Test, um das Vorhandensein eines HIV-Virus mit Sicherheit zu entscheiden."

a) Notieren Sie die wichtigsten Testdaten, die im Text stehen:
   - die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion in der BRD.
   - die Test-Sensitivität. Notieren Sie kurz dazu, was sie bedeutet.
   - die Test-Spezifität. Notieren Sie wieder kurz ihre Bedeutung.

L: Die Wahrscheinlichkeit einer HIV-Infektion beträgt in der BRD rund 0,1%.
Die Wahrscheinlichkeit einer richtigen "Positiv"-Diagnose (die Sensitivität) des AIDS-Tests beträgt 99,8%.
Die Wahrscheinlichkeit einer richtigen "Negativ"-Diagnose des AIDS-Testes beträgt 99%.

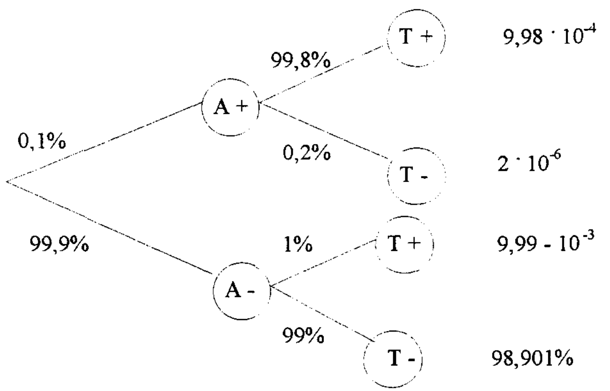
b) Notieren Sie einen ersten Kommentar in einigen knappen Sätzen; etwa als Antworten auf Fragen wie: Ist der AIDS-Test tauglich? Kann man ihm mit akzeptablen Unsicherheiten trauen? Liefert er die Sicherheiten, die wegen bevölkerungspolitischer bzw. individueller Konsequenzen zu fordern sind?

L: Mit fast 100%iger Sicherheit liefert der Test genau die richtigen Ergebnisse.

Er scheint in hohem Maße zuverlässig zu sein.

c) Zur genaueren stochastischen Untersuchung der Ausgangsfrage: Entwickeln Sie ein Baumdiagramm, das genau die interessierenden Fragen differenziert: AIDS oder Nicht-AIDS; Test positiv oder Test negativ; mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

L: A +: Es liegt eine AIDS-Infektion vor.
A -: Es liegt keine AIDS-Infektion vor.
T +: Das Testergebnis ist "positiv"
T -: Das Testergebnis ist "negativ".



d) Mit dem Baumdiagramm machen Sie einen zweiten Anlauf:
Jemand läßt einen AIDS-Test machen. Der Test diagnostiziert eine AIDS-Infektion.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Testperson tatsächlich infiziert? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Testperson tatsächlich nicht infiziert? Kommentar analog b)!

L: P (tatsächlich AIDS-infiziert, wenn der Test "positiv" liefert)
= P (A + | T +)
= P (A + und T +) / P(alle Ereignisse, die T+ liefern)
$\approx 9{,}98 \cdot 10^{-4} / (9{,}98 \cdot 10^{-4} + 9{,}99 \cdot 10^{-3})$
$\approx 9{,}1\%$.
Lautet das Testergebnis "positiv", so ist die Wahrscheinlichkeit für eine tatsächliche Infektion nur 9,1%. - Kommentar s.u.

e) Kaum zu glauben, oder? Ehe die ganze Stochastik für falsch und verrückt erklärt wird, ein neuer Anlauf mit absoluten Zahlen. Die lassen sich besser überblicken und mit denen können viele sicherer rechnen als mit Wahrscheinlichkeiten.
Nehmen Sie an, 100 000 zufällig ausgewählte Personen werden getestet (wie es als bevölkerungspolitische Maßnahme vorgeschlagen wurde).
- Wie viele von ihnen tragen (im Durchschnitt) die AIDS-Infektion?

Wie viele sind nicht infiziert?
- Wie viele von den AIDS-Trägern werden als solche vom Test erfaßt? -- Kommentar zur Testgüte für diese Gruppe!
- Wie viele von den Nicht-Infizierten werden irrtümlich als doch AIDS-infiziert diagnostiziert? -- Kommentar zu dieser absoluten Zahl!
- Der Anteil der beiden Zahlen an der Zahl der insgesamt als "positiv" diagnostizierten Personen entspricht genau der Wahrscheinlichkeit, die Sie oben berechnet haben.
- Falls Sie dem Ergebnis in d) nicht getraut und deshalb noch keinen Kommentar verfaßt haben, holen Sie es hier nach.

L: Von 100 000 Personen sind (im Durchschnitt) 100 AIDS-Infizierte und 99 990 Nicht-Infizierte. 99,8% der 100 Infizierten erfaßt der Test; also praktisch alle 100. Zur Diagnose der Infektion bei tatsächlich Infizierten ist der Test sehr gut tauglich. Von den Nicht-Infizierten 99 900 Personen werden 1%, also rund 1000 irrtümlich als AIDS-infiziert diagnostiziert. Das bedeutet zwar 99% richtige Testergebnisse, aber doch eine erschreckend hohe Zahl von Test-Fehlurteilen. Von den 1100 "positiven" Testergebnissen stimmen nur 100; das sind rund 9%! Die anderen rund 91% sind falsch!
Kommentar
Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 91% liegt ein Irrtum vor! Ein Test, der so massive Auswirkungen hat (allgemein bevölkerungspolitisch und individuell), der darf nicht solche Ergebnisse liefern. Eine Person, der "positiv" als Testergebnis gemeldet wird, muß sich darauf verlassen können, daß dieses Urteil zumindest mit hoher Zuverlässigkeit gilt. Hier aber ist sogar mit übergroßer Deutlichkeit das Gegenteil wahr. Was soll so ein Testergebnis dann noch? Es ist nicht tauglich. Wenn das Resultat alles ist, was ein solcher Test liefert, dann läßt man ihn besser.

f) Woran liegt das nicht akzeptable Ergebnis aus d)/e)?
Zur Prüfung sehen Sie sich den Bruch an, mit dem in d die schockierend kleine Wahrscheinlichkeit für eine AIDS-Infektion trotz positivem Testergebnis errechnet wurde:
- Was steht im Zähler? Runden sie die Zahl auf eine geltende Ziffer. Welche Bedeutung hat diese Zahl in den Ausgangsdaten? Wieso spielen die anderen Zahlen praktisch keine Rolle?
- Runden Sie entsprechend das Ergebnis des Nenners und benennen Sie die Wahrscheinlichkeit gemäß den gegebenen Ausgangsdaten. Wie ist es hier mit dem Einfluß der anderen vorkommenden Zahlen?
- Im wesentlichen ist der Quotient zurückgeführt auf die zwei zentralen Wahrscheinlichkeiten, die das Testergebnis beeinflussen. Zur Überprüfung: Kommt als Wahrscheinlichkeit für eine tatsächliche Infektion bei "positivem" Test in etwa das obige Ergebnis heraus?
- Woran liegt es, daß der Test so schlechte Ergebnisse liefert, obwohl seine Sensitivitäts- und Spezifitätswerte ausgezeichnet sind? Erläutern Sie das Ergebnis der Rechnungen im Lichte der obigen Überlegungen.

L: Der Zähler ergibt gerundet 0,1%, gerade die Infektionsrate in der BRD. Sie wurde längs des Pfades mit 99,8% ≈ 1 multipliziert, was ihren Zahlenwert praktisch nicht änderte. Im Nenner steht gerundet 1%, gerade die Irrtumswahrscheinlichkeit des Testes bei Nicht-Infizierten. Das ergibt sich zum einen, weil die 1% längs des Pfades mit 99,9% ≈ 1 multipliziert, also praktisch nicht geändert wird. Zum anderen fällt die Wahrscheinlichkeitsgröße des anderen Pfades mit $9{,}98 \cdot 10^{-4}$ gegenüber 1% praktisch nicht ins Gewicht. Die unglaublichen Testergebnis-Wahrscheinlichkeiten ergeben sich direkt als Quotient der Infektionsrate und der Irrtumswahrscheinlichkeit des Testes für Nicht-Infizierte. 0,1% / 1% = 10% ergibt in etwa die oben berechnete Wahrscheinlichkeit von (nur) 9% für eine tatsächliche Infektion bei einem "Positiv"-Testergebnis.

Trotz guter Sensitivität und Spezifität liefert der Test Fehlwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 90%, weil die Infektion in der Bevölkerung so selten ist. Sie ist um den Faktor 10 seltener als der Testfehler bei Nicht-Infizierten. Deshalb beurteilt der Test auch (zu Unrecht) 10mal so viele Nicht-Infizierte als "positiv" wie tatsächlich Infizierte vorhanden sind (die er praktisch alle zu Recht als "positiv" diagnostiziert).

VORSICHT: Diese Überschlagsrechnung gilt nur, solange die zweite Wahrscheinlichkeitsangabe im Nenner vernachlässigt werden kann, d. h. solange die Infektionsrate in der Bevölkerung tatsächlich so verschwindend gering ist (und solange die Testsensität so hoch ist).

g) Nach Ihrem Kommentar in b) und d)/e) machen Sie hier einen nächsten Beurteilungsstop: Wann tritt immer dieses Problem in Testen auf? Wo gilt es Vorsicht walten zu lassen bei - eben auch flächendeckend geforderten - Tests?

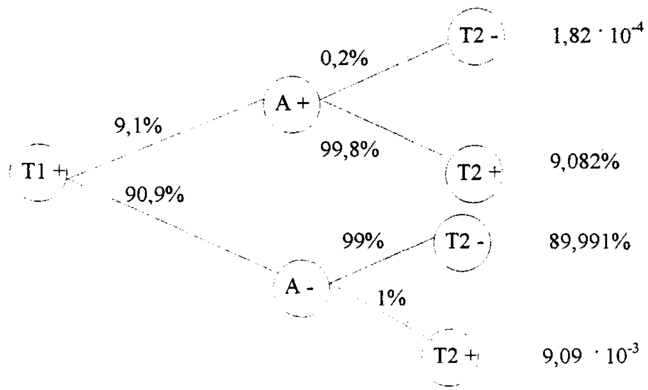
L: Die Diagnose seltener Infektionen/Krankheiten/Ereignisse mit (in der Realität immer noch nicht vollständig richtig operierenden) Testen ist sehr problematisch. Besonders kommt es auf das Verhältnis von Infektions-Anteil und Irrtumswahrscheinlichkeit (bei Nicht-Infizierten ...) des Testes an.

h) Das Ergebnis ist trotz eines ziemlich guten Testverfahrens schlecht wegen der kleinen Infektionsrate. So weit, so schlecht. Trotzdem: nach dem Test weiß man tatsächlich mehr als vorher:
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, für einen zufällig aus der BRD-Bevölkerung herausgegriffenen Menschen, mit AIDS infiziert zu sein?
- Wie hoch ist dieselbe Wahrscheinlichkeit, nachdem das "positiv" Testergebnis vorliegt?
- Immerhin eine Steigerung der 'Gewißheit' um einen gehörigen Faktor, nämlich? Das hilft einem Betroffenen allerdings nichts.

L: 0,1% ist die Infektionsrate in der BRD etwa. Das Testergebnis "positiv" weist die Wahrscheinlichkeit 9,1 für die AIDS-Infektion zu.
Die Wahrscheinlichkeit ('Gewißheit') ist um einen Faktor von rund 90 gestiegen!

i) *Neue Idee:* Wenn ein Test eine solch große 'Gewißheits'steigerung zur Folge hat, dann könnte der Test-"Positive" doch das Ganze vielleicht noch einmal machen?...
- Also: Das Baumdiagramm startet mit einem Menschen, dessen Test positiv war und differenziert wieder wie oben in c.
- Die entsprechenden 'Ast'-Wahrscheinlichkeiten sind inzwischen berechnet bzw. als Daten gegeben.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist jemand AIDS-infiziert, wenn der Test das auch aussagt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht der zweite Test die "Positiv"-Diagnose fälschlicherweise?
- Ihr Kommentar!

L: T1 +: Test 1 war positiv.
T2 +: Test 2 war positiv
T2 -: Test 2 war negativ.
A +: Es liegt eine AIDS-Infektion vor.
A - : Es liegt keine AIDS-Infektion vor.



$P(A+ \mid T2+) \approx 0{,}09082 / (0{,}09082 + 9{,}09 \cdot 10^{-3}) \approx 90{,}9\%$

Zu rund 91% ist die "Positiv"-Aussage des 2. AIDS-Testes (sofern der 1. Test auch "positiv" war) richtig. Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 9% liefert auch der zweite Test die "Positiv"-Diagnose irrtümlich. Das ist zumindest ein Ergebnis, das in etwa den Erwartungen einer Testperson entspricht: Mit hoher Wahrscheinlichkeit liefert der Test das Ergebnis, das auch tatsächlich vorliegt.

j) Zur Sicherheit rechnen Sie das 2. Testergebnis noch einmal mit absoluten Beispielwerten durch.
- Gehen Sie aus von den Test-"positiv"-Zahlen aus e).
- Berechnen Sie für tatsächlich Infizierte die Zahl der Personen, die beim 2. Mal wieder "positiv" bekommen.
- Berechnen Sie die entsprechende Zahl für die tatsächlich nicht Infizierten.

- Welchen Anteil haben die richtig als infiziert Diagnostizierten an der Gesamtzahl der Test-"positiv"-Personen beim 2. Test? Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus i).
- Warum ist das Ergebnis hier um so viel besser als beim 1. Test?

L: Der 1. Test hatte von den 100 000 untersuchten Personen 100 zu Recht, 1000 fälschlicherweise "positiv" bewertet. Von den 100 AIDS-Trägern werden wieder alle (99,8%) als "positiv" herausgefunden. Von den 1000 Nicht-Infizierten werden 10% (1% von 1000) fälschlicherweise wieder als AIDS-infiziert diagnostiziert.
Der Anteil der tatsächlichen AIDS-Träger unter den Test-"positiv"-Leuten beträgt beim 2. Test 100/110 ≈ 90%. Das bestätigt das Ergebnis aus i). Das Resultat ist hier viel besser als beim 1. Test, weil der Anteil der Infizierten an der Untersuchtenzahl groß ist, nämlich nicht mehr 100 von 100 000, sondern 100 von 1100. Das Problem oben tritt auf bei seltenen Ereignissen, sonst nicht.

k) Darauf kommt es eigentlich an:
- Notieren Sie aus Ihrem allgemeinen Wissen eine Empfehlung für den Umgang mit AIDS; und neu eine Anleitung für eine rationale Verfahrensweise mit AIDS-Tests.
- Verfassen Sie einen Brief an Politiker, die sich den zwangsweisen AIDS-Test für die ganze Bevölkerung oder für ganze Bevölkerungsteile auf die Fahne schreiben.
- Beides können Sie auch abschicken.

L: *AIDS-Empfehlungen*
Was man schon wußte:
(1) Vor einem möglichen Geschlechtsverkehr Kondome zur Sicherheit besorgen und die auch zur Verfügung haben.
(2) Geschlechtsverkehr nur mit Kondom ausführen. Das Kondom früh genug benutzen.
(3) Bei Verdacht auf AIDS- aus welchen Gründen auch immer (z. B. wegen Verletzung der Regel 2) - zur Sicherheit einen Test machen lassen.
Was neu ist:
(4) Wenn das Testergebnis "positiv" lautet, nicht den Kopf verlieren. Es ist sehr wahrscheinlich, daß keine AIDS-Infektion vorliegt.
(5) Für den Fall 4 einen zweiten Test machen lassen. Auf den kann man sicher einigermaßen verlassen. So oder so.
Politikerschelte: ...

l) Als Nachbetrachtung neueste Daten: In dem Aufsatz von König (s.o.) sind noch andere Werte am Schluß erwähnt:

Wünschbar hohe Werte für Sensititvität (= 1) und Spezifität (99,995%) sind bei HIV-Testkombinationen noch nicht erreicht (letzte Zahlen sind 99,9% bzw. 99,7%).
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mensch mit "positivem" Testergebnis tatsächlich AIDS-infiziert, wenn die aktuellsten Werte ("letzte Zahlen") für Sensitivität und Spezifität bereits überall realisiert wären?
- Wäre auch hier ein 2. Test 'auf jeden Fall' nötig, um die Konsequenzen einigermaßen abzusichern? Falls ja, wie sicher würde man mit einem 2. Test tatsächlich AIDS diagnostizieren?

L: $P(A+ \mid T+) \approx 9{,}99 \cdot 10^{-4} / (9{,}99 \cdot 10^{-4} + 2{,}997 \cdot 10^{-3}) \approx 25{,}0\%$ (Baumdiagramm) wie in Punkt c).
In nur einem Viertel der Fälle ist die Aids-Infektions-Diagnose richtig. Das ist zwar besser als oben, aber keineswegs akzeptabel. Nach wie vor muß man annehmen, daß man nicht infiziert ist (zu 75%), obwohl der Test die Infektion behauptet!
Der Ausweg- wie oben durch einen 2. Test - ist auf jeden Fall anzuraten, um überhaupt zu einer brauchbaren (vertrauenswürdigen ?!) Aussage zu gelangen.
Für den zweiten Test kommt als Wahrscheinlichkeit für eine tatsächliche AIDS-Infektkion, die vom Test 'bescheinigt' wird, heraus (Baumdiagramm entsprechend dem obigen unter Punkt i) : $P(A+ \mid T2+) \approx 0{,}24975 / (0{,}24975 + 2{,}25 \cdot 10^{-3}) \approx 99{,}1\%$.
Mit dem zweiten Test erreicht man eine hohe Sicherheit für die gemachte Infektionsbehauptung; sofern für die neuesten Tests bereits die "letzten Zahlen" zutreffen.

m) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mensch mit "positivem" Testergebnis tatsächlich AIDS-Infiziert, wenn die gewünschten hohen Werte bereits realisiert wären?
Ist wieder ein 2. Test nötig? Was würde er bringen?

L: Wären die gewünschten Daten bereits realisiert, dann ergäbe sich für eine tatsächliche AIDS-Infektion bei "positivem" Testergebnis die Wahrscheinlichkeit (Baumdiagramm analog Punkt c):
$P(A+ \mid T+) \approx 0{,}1\% / (0{,}1\% + 4{,}995 \cdot 10^{-5}) \approx 99{,}2\%$.
Das Testresultat läge erstmals in Größenordnungen, die man von einem Test erwartet. Ein 2. Test ist hier vielleicht nicht mehr erforderlich, zumindest hat er nicht mehr die Dringlichkeit wie bei den beiden obigen Testen.
Da er zur Absicherung des individuellen (Fehler-)Risikos aber evtl. doch gemacht wird, hier wieder die Wahrscheinlichkeit, daß ein "positives" Testergebnis tatsächlich zutrifft (Baumdiagramm analog Punkt i):
$P(A+ \mid T2+) \approx 0{,}952 / (0{,}952 + 2{,}4 \cdot 10^{-6}) \approx 1 - 2{,}5 \cdot 10^{-6} \approx 1$.

Nachbemerkungen

Zum Aussagewert des 2. Testes

Die Berechnungen mit einem zweiten Test oben unterstellen, daß die die Testgüte charakterisierenden Werte für die Sensitivität und Spezifität reine testtypische

Werte sind, daß die Fehlerwerte allein durch den Test verursacht und testpersonenunabhängig sind. Denkbar wäre allerdings auch, daß die Teste in beide Richtungen 100%ige Sicherheit haben, aber die Testpersonen bestimmte erwartbare Reaktionsmuster personenabhängig nicht aufweisen - etwa keine Bildung des untersuchten Antikörpers bei Infizierten; oder geburtsbedingt immer Anwesenheit des untersuchten Antikörpers bei Nicht-Infizierten. Da die Fehlerhäufigkeit nicht durch den Test verursacht wäre, ließe sich die Situation auch nicht durch einen 2. Test verbessern. Der würde wieder alle Personen herausfiltern, die er im ersten Test identifiziert hat.
Inwieweit der HIV-Infektions Test personenunabhängig oder -abhängig zu seinen Sensitivitäts- und Spezifitätsdaten kommt, ist mir nicht bekannt. "Für die meisten medizinischen Diagnostika vermute ich einen Mittelplatz zwischen völliger Abhängigkeit und völliger Unabhängigkeit," schrieb mir Herr Diepgen, als er mich auf die begrenzte Aussagekraft des 2. Testes hinwies.
Die 'neusten Werte' (s.o. Punkt 1) und 'gewünschten Werte' (s.o. Punkt m) weisen eher in die Richtung der personenunabhängigen Verbesserung der Testgüte.

Zu den Daten

Die Daten über die Infektionsrate sind unsicher. Die Dunkelziffer ist eine unbekannte Größe. Die Person, die einen AIDS-Test machen läßt, hat in der Regel einen Anlaß dazu, etwa die konkrete Befürchtung einer Infektion, weil der oder die GeschlechtspartnerIn z.B. zu einer Risikogruppe gehört. Daher ist die Infektionsrate vermutlich höher als in der Gesamtbevölkerung. Aber wo auch immer die Infektionsrate liegt, sie ist in der BRD sehr klein. Die Rechnung und Korrektur (durch einen 2. Test) sind nicht überflüssig. Die Prognosefähigkeit eines Testes (mit üblichen Fehlertoleranzen) ist prinzipiell schlecht, sobald es um seltene Ereignisse geht.

Stelle im Mathematikunterricht

Das Thema paßt, wo bedingte Wahrscheinlichkeiten behandelt werden: im Stochastikunterricht in der Oberstufe oder auch in der Sekundarstufe I in Klasse 10 oder im Wahlpflichtbereich.

Der Satz von Bayes

Den Satz von Bayes (der hier ja vorkommt) in seiner mengentheoretisch formalisierten Form habe ich nicht behandelt. Die Formalisierung verstellt auch hier eher den Blick auf das, worum es geht und warum so gerechnet werden muß. Die aussagenlogische Formalisierung ("A+ und T+"; aller Ereignisse, die T+ liefern") paßt eher, s. Punkt d).

Fortführungsmöglichkeiten

Die Fragestellung kann man fortsetzen in die Untersuchung der Kurvendarstellung der (richtigen) Vorhersage-Wahrscheinlichkeit des Testes in Abhängigkeit von der

- Auftretungswahrscheinlichkeit der AIDS- Infektion (s.o. 'Zu den Daten').
- Spezifität des Testes (s. letzte, wünschbare Zahlen, Punkt l)

Die Diagnose seltener Ereignisse

Sie ist ein übliches Thema im Stochastikunterricht. Es gibt wie in anderen Schulbüchern auch ein entsprechendes Kapitel im Cornelsen-Schwann-Schulbuch (s. Literaturliste). So ähnlich habe ich es auch in meinem Stochastik-Kurs behandelt. Die SchülerInnen haben es bestenfalls als 'interessant' hingenommen; nicht anders als anderen Mathematikstoff auch. Die Schulbuchaufgaben wurden wie andere auch eben nur gerechnet und das war's. Erst als dasselbe mathematische Thema unter dem Stichwort AIDS (-Tests) noch einmal auf den Tisch kam, erhielt es ernsthafte Bedeutung.

Reaktionen meiner SchülerInnen

Das Thema habe ich im Unterricht (Stochastik in der Oberstufe) behandelt, als ich die Materialien in die Hand bekam (Obwohl gerade Schätzen dran war). Die SchülerInnen haben das Rechnungsergebnis im ersten Anlauf nicht geglaubt. Sie vermuteten Rechenfehler oder Ansatzfehler oder ... ("bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiß man ja nie so genau .."). Erst die nochmalige Prüfung durch Verwendung absoluter Zahlen bewirkte eine zögernde Annäherung.
"Was soll der ganze Test denn überhaupt?" u.ä. Reaktionen folgten ganz naheliegend. Erst als ich (nach einiger Zeit, eben als ich es mir selber überlegt hatte) den nochmaligen Test vorschlug, gab es wieder Zutrauen in diese Tests- und auch in die Wahrscheinlichkeitsrechnung 'an sich' trotz der differenzierenden Bedenken (s.o. 'Zum Aussagewert...').

Reaktionen von anderen SchülerInnen und LehrerInnen

Es sprach sich in der Doppelstundenpause schnell herum, daß in meinem Mathematikunterricht über AIDS gesprochen und (mit sensationellem Ergebnis) gerechnet wurde. Mehrere SchülerInnen aus anderen Kursen fragten direkt in der Pause, der nächsten Pause oder in den folgenden Tagen nach.
Für sie waren die absoluten Zahlen zumindest bedenkenswert. Die lediglich nötige Prozentrechnung war einigermaßen einsichtig zu machen. Deshalb konnten sie sich nicht verstecken hinter Bemerkungen wie "Wir haben keine Stochastik, können also nichts verstehen".
Auch (nicht Mathematik-)KollegInnen hatten etwas gehört und fragten nach; etwa "Der AIDS-Test soll unbrauchbar sein?". Meine Erklärungsversuche und die Reaktionen waren ähnlich bei den anderen SchülerInnen. Allerdings kam auch von einem Biologen: "Dann müssen wir ja unsere ganze Epidemielehre ändern".

Handlungsorientierender Mathematikunterricht

Für Handlungen der SchülerInnen - aktuelle oder realistisch zu erwartende - soll (auch) der Mathematikunterricht brauchbare und handfeste Orientierungen liefern. Mit diesem Beispiel kommt man der Forderung an relevanter Stelle nach (individualgeschichtlich und auch gesamtpolitisch). Das Material ist geeignet, einen wichtigen Sachverhalt aufzuklären; und den Stellenwert der Mathematisierung und Mathematik zu klären.

Selbstverwirklichung in sozialer Verantwortung

So lautet für Nordrhein-Westfalen die globale Zielsetzung des Sek. II-Mathematikunterrichtes, gleichwertig neben der Wissenschaftspropädeutik. MathematiklehrerInnen fühlen sich diesem Ziel i.d.R. nicht verpflichtet, da es kaum Anregungen zur Annäherung an diese Zielsetzung für den Mathematikunterricht gibt. Hier halten Sie ein Beispiel in Händen, das explizit auf die Selbstverwirklichung in sozialer Verantwortung ausgerichtet ist.

Das Thema AIDS im Mathematikunterricht?

Bei einem Vortrag auf einer Bezirksfachkonferenz habe ich mit diesem Beispiel begonnen. Eine Teilnehmerin, die etwas zu spät kam, dreht sich wieder um mit der Bemerkung: "Oh, ich bin hier wohl falsch. Ich wollte zum Mathematik-Treff."

Literatur

König, G.: AIDS und Mathematikunterricht, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) 1991 Heft 6.

Diepgen, R. u.a.: Mathematik, Stochastik Grundkurs, Verlag Cornelsen-Schwann, Düsseldorf 1989. Darin: Die Diagnostik seltener Ereignisse, S. 114-166.

König, R.: Aktuelle Anwendungen der Stochastik, Aids im Stochastikunterricht In: Müller (Hrg), Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Unterrichtsmaterialien für Lehrkräfte der Sekundarstufe II, 12. Ergänzung, Stark-Verlag Freising 1992

Anschrift:
Heinz Boer
Bahnhofstr. 72
4405 Appelhülsen

Veröffentlichung von Abituraufgaben

Unser Mitherausgeber StD Heinz Althoff
bittet die Kollegen in den Schulen um

- die Zusendung von Abituraufgaben aus dem Bereich Stochastik
- möglichst mit Erfahrungsberichten und Kommentaren

zur Veröffentlichung in einem der nächsten Hefte von Stochastik in der Schule

- möglichst bis Ende September dieses Jahres.

StD Heinz Althoff
Ruschfeldstr. 17
33619 Bielefeld