Wahrscheinlichkeit und Rationalität

Einige Randbemerkungen zu einem schwierigen Verhältnis

Raphael Diepgen, Bochum

Zusammenfassung: Es werden anhand des bekannten und unterhaltsamen "Ziegenproblems" kontrastierend die stochastischen Denkweisen der Objektivisten einerseits, der Bayesianer andererseits skizziert.

Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet ein Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen Türen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer 1. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten "Ich zeig' Ihnen mal was" öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer 3, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. Er fragt: "Bleiben Sie bei Nummer 1, oder wählen Sie jetzt doch lieber Nummer 2?" - Ja, was tun Sie jetzt?

Die Diskussion dieses überaus wichtigen Problems füllte vor einiger Zeit ganze Seiten und Leserbriefspalten zunächst amerikanischer, dann aber auch deutscher Studienrats-Magazine wie DIE ZEIT und DER SPIEGEL, und gab sogar noch genügend Stoff für eine publizistische Zweitverwertung in Buchform (Randow 1992). Interessanter als die Wege und Irrwege dieser Diskussion schien die selbstverständliche Überzeugung, für dieses Problem gebe es eine verbindliche Lösung aufgrund mathematischer, genauer stochastischer Argumentation. Verständlich ist diese Überzeugung, weil sich mathematische Stochastik der Öffentlichkeit gegenüber ja gerade als "Kunst des vernünftigen und rationalen Vermutens und Entscheidens" in Situationen der Ungewißheit - und um eine solche handelt es sich hier ohne Zweifel - darzustellen pflegt. Fraglich indessen ist diese Überzeugung gerade auf der Folie jener Main-stream-Stochastik, wie sie seit Jahrzehnten die schulischen und universitären Curricula dominiert. Dieser "objektivistischen" Mehrheitsposition nämlich ist Ungewißheit nur als klassische oder statistische Wahrscheinlichkeit beschreibbar: Es geht also um Situationen, in denen von vornherein Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit oder beliebige Wiederholbarkeit gegeben ist - zumindest als plausible Modellannahme. Nur das klassische Abzählen der "günstigen" gegen die "möglichen" Ergebnisse oder aber die statistische Erfassung relativer Häufigkeiten ist dieser Schule hinreichend objektiver Grund von Wahrscheinlichkeiten; stochastische Argumentation über rationales Verhalten hat sich hier nur auf diesen Grund zu beschränken. Ganz anders und viel weiter die Auffassung der Minderheitenposition, die ihrer Berufung auf das ehrwürdige Theorem des englischen Geistlichen Thomas Bayes zumeist "bayessch" genannt wird: Für den Bayesianer gibt es Wahrscheinlichkeit auch als Maß für die Glaubensstärke, die Plausibilität, die Mutmaßlichkeit oder eben Wahr-scheinlichkeit einer Hypothese, Wahrscheinlichkeit als Maß für den subjektiven Zustand zwischen Nichtwissen und Wissen, als Maß für Wettbereitschaft. Stochastische Argumentation über rationales Verhalten hat hier ein entsprechend weites Feld. Beide Schulen sind inzwischen auch in Lehrwerken für die Lehreraus- und -weiterbildung vertreten: Man lese kontrastierend etwa Dinges & Rost (1982) für den objektivistischen Standpunkt und Wickmann (1990) als engagierten Repräsentanten des Bayesschen Lagers.

Wie fundamental sich die Denk- und Argumentationsweisen dieser beiden Positionen unterscheiden (lassen), wie unterschiedlich sie jeweils Rationalität verstehen, dies zeigt die vergleichende Analyse unseres kleinen Ausgangsproblems der Fernsehshow.

Die Bayessche Argumentation

Sie haben drei Vermutungen oder Hypothesen, nämlich

H_1: Das Auto steht hinter Tür Nummer 1,

H_2: Das Auto steht hinter Tür Nummer 2,

H_3: Das Auto steht hinter Tür Nummer 3.

Wenn Sie keinerlei weitere Informationen oder Indizien haben, beispielsweise über die "Eignung" der drei Türen für Auto oder Ziege, über die Vorlieben der Studiohilfsarbeiter usw., dann haben für Sie diese drei Hypothesen vor der Nachfrage des Moderators, also a priori gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich jeweils von einem Drittel. Quelle für diese Wahrscheinlichkeiten ist Ihr subjektiver Wissensstand, oder besser, Ihr Zustand völligen Unwissens. Diese Wahrscheinlichkeiten beruhen nicht etwa auf der Annahme, das Auto sei mit gleicher Wahrscheinlichkeit, beispielsweise aufgrund eines Würfelwurfs, hinter eine der drei Türen plaziert worden. Sollten Sie irgendwelche Indizien haben für die Position des Autos und der Ziegen, beispielsweise aufgrund eines entfernten Meckergeräusches, das am ehesten noch aus der Richtung der Tür Nummer 2 zu kommen scheint, dann hätten für Sie die drei Hypothesen a priori nicht mehr gleiche, sondern unterschiedliche Wahrscheinlichkeit. Sie haben nun willkürlich Ihren ersten Tip auf Tür Nummer 1 abgegeben und erleben nun, wie der Moderator Tür Nummer 3 öffnet. Wie wahrscheinlich ist dieses eintretende Ereignis oder Datum (von Lateinisch "datum" für "Gegebenes"), nennen wir es D, nämlich daß der Moderator - nach Ihrem Tip auf Tür Nummer 1 - Tür Nummer 3 öffnet, jeweils unter der Annahme, in Wahrheit gelte H_1, H_2 oder H_3? Sicher dürfte angesichts der theatralischen Logik der Show sein, daß der Moderator nur eine Tür öffnet, auf die Sie nicht getippt haben *und* hinter der eine Ziege wartet. Befindet sich das Auto tatsächlich hinter der Tür Nummer 2 oder 3, dann hat der Moderator keine Wahl, welche Tür er öffnet. Befindet sich indessen das Auto tatsächlich hinter der Tür Nummer 1, auf die Sie ja getippt haben, so kann der Moderator nach Belieben Tür Nummer 2 oder 3 öffnen. Wenn Sie nichts weiteres

über das "Belieben" des Moderators wissen, so haben für Sie - subjektiv - beide Möglichkeiten gleiche Wahrscheinlichkeit. Damit ergeben sich also für Sie folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten für das tatsächlich eingetretene Datum, die sogenannten Likelihoods:

$$P(D|H_1) = 0{,}5$$

$$P(D|H_2) = 1$$

$$P(D|H_3) = 0$$

Mit diesen Ihren subjektiven Likelihoods und den a-priori-Wahrscheinlichkeiten von jeweils einem Drittel *vor* Beobachtung des Datums ergeben sich nun mit Hilfe der berühmten und unumstrittenen Formel von Bayes, nämlich

$$P(H_i|D) = \frac{P(H_i)\cdot P(D|H_i)}{\sum_j P(H_j)\cdot P(D|H_j)},$$

die Wahrscheinlichkeiten *nach* Beobachtung des Datums, also die sogenannten a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten

$$P(H_1|D) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}5}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}5 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{1}{3} \quad \text{und } P(H_2|D) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}5 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{2}{3}.$$

Nach dem Verhalten des Moderators ist nun also für Sie die Hypothese H_2 doppelt so wahrscheinlich wie H_1. Es ist also vernünftig und rational, den Tip zu wechseln und nun auf Tür Nummer 2 zu zeigen. Sie erwarten dahinter den Gewinn mit einer Wahrscheinlichkeit von zwei Dritteln.

Soweit die Argumentation im Sinne der Bayesianer. Für einen Objektivisten ist diese Argumentation nicht überzeugend, also ganz und gar nicht rational. Nicht nur wird er auf die Fraglichkeit, Subjektivität und Unverbindlichkeit der Wahl der a-priori-Wahrscheinlichkeiten ein Drittel verweisen, auch darauf, daß es völlig offen ist, ob solche subjektiven Wahrscheinlichkeiten überhaupt der Kolmogoroffschen Axiomatik der Wahrscheinlichkeitstheorie genügen. Nein, viel grundsätzlicher noch: Für ihn macht es schon überhaupt keinen Sinn, von der "Wahrscheinlichkeit" (im Sinne der Kolmogoroffschen Axiomatik der Wahrscheinlichkeitstheorie) der drei Hypothesen H_1, H_2 und H_3 zu reden. Für den Objektivisten ist nämlich eine jede dieser Hypothesen entweder wahr oder falsch, sie hat aber keine "Wahrscheinlichkeit". Wahrscheinlichkeiten gibt es für den Objektivisten eben nicht als Maß subjektiv empfundener Glaubensstärke, Überzeugtheit oder Plausibilität, sondern nur im Sinne des klassischen oder statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Und im Sinne dieser Begriffe lassen sich hier kaum die Hypothesenwahrscheinlichkeiten bestimmen: Sollen diese

Hypothesenwahrscheinlichkeiten nicht rein hypothetisch bleiben, müßten dafür nämlich statistische Erfahrungen über die Plazierung des Autos vorliegen, oder diese Plazierung müßte mit einem bekannten laplaceschen Zufallsmechanismus, beispielsweise einem Würfel, bestimmt worden sein. Von beidem ist aber überhaupt nicht die Rede. Auch die - wiederum auf völliges Nichtwissen gestützte - Likelihood $P(D|H_1)=0{,}5$ wird den Objektivisten nicht überzeugen. Überzeugend wäre sie für ihn erst, wenn man ihm die Annahme plausibel machen könnte, daß der Türwahlprozeß im Kopf des Moderators nach dem Modell des fairen Münzwurfs abläuft.

Nun fragt sich, wie der Objektivist für die geschilderte Situation dann überhaupt noch zu nicht-subjektiven Wahrscheinlichkeiten kommen will. Sein Trick ist: Er führt einfach einen mit klassischer Wahrscheinlichkeit beschreibbaren Zufallsmechanismus, beispielsweise den Würfel, in diese Situation ein. (Bekannt ist dies sicherlich aus den klassischen "objektivistischen" Verfahren Signifikanztest und Konfidenzintervall: Der dort grundlegende Begriff der Zufallsstichprobe beinhaltet nämlich einen solchen Zufallsmechanismus, ist nämlich eine Zufallsstichprobe eine solche, bei der für jedes Element der Population bekannt - und zumeist gleich - ist die Wahrscheinlichkeit, für die Stichprobe ausgewählt zu werden.) Diese Einführung des klassisch (oder statistisch) beschreibbaren Zufalls - man spricht treffend von Randomisierung - gelingt dem Objektivisten indessen nur, indem er die Problemsituation etwas anders formuliert: Er fragt nämlich nicht mehr wie der Bayesianer *nach* Ablauf des Geschehens danach, wie wahrscheinlich das Auto nun hinter der Tür Nummer 1 bzw. 2 steht, sondern er fragt *vor* dem Ablauf des Geschehens: Gibt es für diese Situation eine Verhaltensregel, eine Strategie, die mit hinreichend hoher Wahrscheinlichkeit zum Gewinn führt (zumindest unter den relevanten möglichen "wahren" Gegebenheiten)? Dies ist seine Antwort:

Die Objektivistische Argumentation

Betrachten Sie folgende Strategie, genannt die Wechselstrategie: Sie geben Ihren ersten Tip nicht ab nach Belieben, sondern mit kontrollierten klassischen Wahrscheinlichkeiten, beispielsweise nach dem Wurf eines Würfels: Bei "1" oder "2" zeigen Sie auf Tür Nummer 1, bei "3" oder "4" zeigen Sie auf Tür Nummer 2 und bei "5" oder "6" schließlich auf Tür Nummer 3. Nach der Frage des Moderators wechseln Sie dann Ihren Tip; daher der Name für diese Strategie. Wie wahrscheinlich ist nun für diese Strategie der Gewinn, jeweils die Geltung der Hypothesen H_1, H_2 oder H_3 vorausgesetzt?

Im Falle H_1, wenn also das Auto tatsächlich hinter der Tür Nummer 1 steht, gilt: Sie gewinnen genau dann, wenn entweder

1. Sie anfangs auf Tür Nummer 2 tippen (und der Moderator notgedrungen Tür Nummer 3 öffnet),

oder

2. Sie anfangs auf Tür Nummer 3 tippen (und der Moderator notgedrungen Tür Nummer 2 öffnet).

Diese beiden disjunkten Ereignisse haben aufgrund Ihres randomisierten Würfelwurfs - und *nur* deswegen - jeweils die klassische Wahrscheinlichkeit ein Drittel. Im Falle der Geltung von H_1 gewinnen Sie also bei dieser Wechselstrategie mit Wahrscheinlichkeit zwei Drittel.

Wie sieht's im Falle H_2 aus: Sie gewinnen genau dann, wenn entweder

1. Sie anfangs auf Tür Nummer 1 tippen
(und der Moderator notgedrungen Tür Nummer 3 öffnet),

oder

2. Sie anfangs auf Tür Nummer 3 tippen
(und der Moderator notgedrungen Tür Nummer 1 öffnet).

Auch im Falle H_2 führt die Wechselstrategie also mit einer Wahrscheinlichkeit von zwei Dritteln zum Gewinn.

Völlig analog ergibt sich dann - der Leser wird die Symmetrie bereits bemerkt haben - auch für den Fall H_3 eine Zwei-Drittel-Gewinnwahrscheinlichkeit.

Die hier skizzierte Wechselstrategie führt also mit 66,6 %-iger Wahrscheinlichkeit zum Gewinn, gleich hinter welcher Tür sich das Auto tatsächlich befindet. Demgegenüber führt die Nichtwechselstrategie nur mit 33,3 %-iger Wahrscheinlichkeit zum Gewinn, nämlich jeweils nur dann, wenn der erste Tip richtig ist. Deshalb ist die Wechselstrategie vernünftiger und rationaler als die Nichtwechselstrategie. (Die 66,6 % Gewinnwahrscheinlichkeit der Wechselstrategie gilt übrigens von vornherein, während die Bayessche Wahrscheinlichkeit von 66,6 % dafür, daß das Auto hinter Tür Nummer 2 steht, erst nach Beobachtung des Datums sich ergibt. Man spricht deshalb auch von der "initial precision" der objektivistischen Strategien im Unterschied zur "final precision" der Bayesschen Argumentationen.)

Soweit die objektivistische Argumentation. Sie kommt gänzlich ohne subjektive Wahrscheinlichkeiten aus, denn ihre Wahrscheinlichkeiten sind letztlich die klassischen eines bekannten Zufallsmechanismus, nämlich des Würfels. Damit ist aber auch klar: Kommen Sie unvorbereitet in die geschilderte Situation und geben Sie daher insbesondere Ihren ersten Tip nicht mit kontrollierten Wahrscheinlichkeiten des Würfels ab, sondern unkontrolliert beispielsweise einfach aufgrund Ihrer Vorlieben, Ihrer momentanen Stimmung, auf Zuruf aus dem Publikum usw., dann spielen Sie eben nicht mehr die entsprechende Strategie; ohne die anfängliche Randomisierung bricht die Argumentation über die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Strategie sofort zusammen. Insofern antwortet der Objektivist auch gar nicht genau auf die ursprüngliche Frage, die ja darauf zielte, was zu tun sei, nachdem Sie bereits - ohne den Würfel - Ihren ersten Tip abgegeben haben. Auf diese ursprüngliche Frage aber, so würde der Objektivist mit einem bedauerlichen Achselzucken einwenden, gibt es - zumindest mit den Mitteln der Mathematik - überhaupt keine rationale Antwort. Für den Objektivisten folgt daher aus den Axiomen von Kolmogoroff gleichsam der Lehrsatz von Gorbatschow: "Wer zu spät kommt, den bestraft das Leben!" Will heißen: Wer zu spät zum Statistiker kommt, nämlich *nachdem* das Datum schon da und die Randomisierung verpaßt ist, dem ist mit den Mitteln der mathematischen Statistik nicht mehr zu helfen!

Strenge Objektivisten sehen daher den Anwendungsbereich mathematisch-stochastischer Argumentation viel enger und bescheidener als die Bayesianer. Einen Rationalitätsgewinn gibt es nach objektivistischer Auffassung dann, wenn eine *im Vorhinein* festgelegte Strategie *mit Randomisierung* durchgespielt werden kann, wie es beispielsweise die berühmte Theorie von Neyman und Pearson für den Signifikanztest und das Konfidenzintervall vorsieht. Und auch dann mag der Rationalitätsgewinn noch hypothetisch bleiben: Denn typischerweise ist die "Gewinnwahrscheinlichkeit" der Strategie leider nicht wie in unserem einfachen Beispiel unabhängig, sondern vielmehr wie beim Signifikanztest und Konfidenzintervall überaus abhängig davon, welche Hypothese unbekannterweise in Wahrheit gilt. Und damit ist die "Gewinnwahrscheinlichkeit" typischerweise eben nicht bekannt, sondern allenfalls durch eine Schranke abschätzbar.

Im Vorhinein festgelegte Strategien *mit Randomisierung* durchzuspielen mag in bestimmten Anwendungsbereichen, nämlich solchen mit hoher Planbarkeit, problemlos möglich sein, beispielsweise in der industriellen Qualitätskontrolle oder der pharmakologischen Forschung. In vielen Forschungs- und Praxisbereichen indessen ist dies kaum möglich, etwa in der Sozialforschung und Demoskopie: Weder kann dort randomisiert werden, beispielsweise weil Stichproben einfach nicht nach Zufall gezogen werden können. Noch ist es möglich, die Strategien im Vorhinein festzulegen, etwa weil der Stichprobenumfang nicht feststeht, weil Unvorhergesehenes geschieht, weil neue Probleme und Fragestellungen sich erst während der Datenerhebung ergeben und so weiter und so fort. Kommt nun aber ein solcher Forscher oder Praktiker *nach* seiner *nichtrandomisierten* Datenerhebung, also viel zu spät, zur objektivistischen Statistik, so wird er seltsamerweise kaum mit einem bedauernden, aber ehrlichen Achselzucken seiner Hilflosigkeit überlassen. Stattdessen wird nun die gefällige Placebo-Statistik des Als-ob betrieben: Es werden fleißig Signifikanztests und Konfidenzintervalle berechnet, *als ob* man diese Strategien auch wirklich gespielt hätte. Da es zumeist keine Rückmeldung über Erfolg oder Mißerfolg gibt - wer merkt denn schon, daß er sich bei einem Signifikanztest für die falsche Hypothese "entschieden" (falls dieses Wort hier

überhaupt trifft), daß er mit einem Konfidenzintervall den wahren Parameter nicht getroffen hat? -, bleibt der illusionäre Als-ob-Charakter dieser Statistik auf Dauer verborgen - und alle sind's zufrieden: Der Praktiker oder Forscher, weil die scheinbar angewandte objektivistische Statistik Wissenschaftlichkeit, Klarheit und Objektivität suggeriert und von dem unangenehmen Gefühl der Unsicherheit befreit[H.K.1] der Statistiker, weil er einen zahlenden Kunden mehr hat. Man sei hier bitte nicht so streng: Welche Profession kann denn schon in der heutigen Welt überleben, wenn sie nur dort tätig würde, wo sie wirklich helfen kann!

Natürlich stimmt dieses Bild nicht ganz: Treffender ist vielleicht das psychoanalytische Bild eines objektivistischen Über-Ichs, das die meisten Forscher und Praktiker während ihrer Statistikausbildung erwerben, und eines nicht-objektivistischen Ichs, das die statistische Alltagspraxis regelt. Die Kunst der objektivistischen Statistik besteht nun darin, die Ansprüche des Ichs geschickt so zu erfüllen, daß der Konflikt mit dem Über-Ich nicht erlebt wird. Verwirrung, Verdrängung, Ablenkung, Beruhigung, Entlastung, Ritualisierung, Rhetorik und Scheinheiligkeit - all dies ist Teil dieser hohen Kunst. Eine übliche Argumentationsfigur dieser Kunst ist die Legitimierung des Als-ob in Form allemal notwendiger Modellannahmen: Auch wenn die Stichprobenziehung nicht durch einen bekannten Zufallsmechanismus erfolgte, so kann man die Gleichzufälligkeit dennoch "hypothetisch" annehmen, auch wenn man Wahrscheinlichkeiten nicht auf statistische Erfahrung stützen kann, so kann man mit ihnen dennoch als "hypothetischen" Werten argumentieren.

Kaum einzusehen ist natürlich, inwiefern diese objektivistische Statistik des Als-ob rationaler sein soll als die mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten arbeitende Bayes-Statistik. Die Bayesianer der Fraglichkeit und Subjektivität ihrer Wahrscheinlichkeiten zu schelten erscheint geradezu pharisäerhaft angesichts der Unehrlichkeiten, die sich die praktizierte Statistik des Als-ob mit objektivistischem Überbau leistet. Seien wir ehrlich: Nimmt man die Ansprüche der Objektivisten ernst, dann ist der legitime Anwendungsbereich von Stochastik überaus eng - zu eng wahrscheinlich, um der Stochastik einen breiten Platz in allgemeinbildenden Pflichtcurricula einzuräumen. Ob hier Bayes eine ausreichende Legitimation gäbe, sei dahingestellt.

Was tun, fragt sich der Mathematiklehrer. Objektivistische Verfahren dominieren zwar die bisherigen Richtlinien, aber Bayessche Verfahren sind damit ganz und gar nicht verboten. Leider werden sie bislang im Unterricht kaum als Alternative zu den objektivistischen Verfahren präsentiert. Grund: Bayessche Alternativen zum Signifikanztest und Konfidenzintervall bedürfen exakterweise stetiger Zufallsvariablen - und dazu kommt ja kaum ein Lehrer. Tatsächlich aber ist es durchaus ausreichend und sinnvoll - und im Zeitalter computerisierter Numerik ohnehin angemessen -, hier mit einfachen diskreten Zufallsvariablen zu approximieren. Und den objektivistischen Verfahren schließlich täte es gut, wenn sie in jener Form präsentiert würden, die ihre Als-ob-Anwendung nach der

Datenerhebung ausschließt und damit zur Ehrlichkeit zwingt: nämlich in Form sequentieller Verfahren (vgl. Diepgen u.a. 1989, 1992, Diepgen 1987). Vielleicht würde dann irgendwann einmal nicht mehr gelten: "Das Signifikanzniveau ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Signifikanztest einer rationalen Entscheidung dient."

Literatur

Diepgen, R.: Sequentielles Testen - auch didaktisch vielleicht eine gute Alternative. *Stochastik in der Schule* 7(1987), S.9-25

Diepgen, R., Kuypers, W. & Rüdiger, K.: *Stochastik Grundkurs*. Düsseldorf: Cornelsen Verlag Schwann-Girardet, 1989

Diepgen, R., Kuypers, W. & Rüdiger, K.: *Stochastik*. Berlin: Cornelsen, 1992

Dinges, H. & Rost, H.: *Prinzipien der Stochastik*. Stuttgart: Teubner, 1982

Randow, G. von : *Das Ziegenproblem. Denken in Wahrscheinlichkeiten*. Hamburg: Rowohlt, 1992

Wickmann, D. 1990: *Bayes-Statistik. Einsicht gewinnen und entscheiden bei Unsicherheit*. Mannheim: BI-Wissenschafts-Verlag, 1992

Raphael Diepgen
Fakultät für Psychologie
Ruhr-Universität Bochum
Universitätsstr. 150
44801 Bochum 1