

## Beiträge zur elementaren Zeitreihenanalyse

Ergänzungen und Erweiterungen zum Aufsatz von A. KIMBER:  
 "Was für eine Bullenhitze! Analyse einiger Temperaturdatensätze"  
 Stochastik in der Schule 12(1992), Heft 1, S. 9 -17

von Günter NORDMEIER, Bad Essen

(Teil 1, Fortsetzung im folgenden Heft)

**Zusammenfassung:** Die Methode der einfachen  $(2k+1)$ - bzw.  $2k$ -gliedrigen gleitenden Mittelwertbildung zur Bestimmung von Trendwerten führt jeweils zu  $k$  fehlenden Werten am unteren und oberen Rand der Trendreihe. Im Beitrag wird ein Verfahren vorgestellt, solche fehlenden Randwerte zu schätzen. An Beispielen werden ferner die Einsatzmöglichkeiten gewichteter gleitender Mittel herausgearbeitet. In diesem Teil wird neues Datenmaterial angeboten, das sich für Zeitreihenanalysen im Mathematikunterricht der Schule eignet. Abschließend erfolgt eine Einführung in die Methode der exponentiellen Glättung.

### 1 Einleitung

In seinem anregenden Aufsatz stellt A. KIMBER (KIMBER, 1992) eine im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schulen etwa vom 10. Schuljahrgang an durchzuführende Unterrichtssequenz dar, die einerseits in die elementare Zeitreihenanalyse einführt und sich andererseits mit einem Problemfeld befaßt, das für Schülerinnen und Schüler von hohem Interesse ist. Wir wollen in diesem Beitrag einige Ergänzungen und Vertiefungen vorstellen, die aus entsprechenden Unterrichtsvorhaben stammen und belegen sollen, welcher Reichtum an Ideen bereits in der elementaren Zeitreihenanalyse vorhanden ist.

Betrachtet man Abb.1 des o. g. Aufsatzes (a.a.O., S.12), so fällt sofort auf, daß auch die geglättete Kurve noch Schwankungen enthält. Es könnte z.B. sein, daß der Trend von einer langfristigen Schwingung überlagert ist. Schüler stellen so etwas fest oder fragen danach! Die Frage läßt sich natürlich nicht mit dem vorgelegten Datenmaterial beantworten. Dazu braucht man Zeitreihen, die über mehrere Jahrzehnte gehen. Bei der Planung einer Unterrichtseinheit zum fraglichen Thema sollte dies beachtet werden. Im dritten Abschnitt dieses Beitrags geben wir ein Beispiel für die Analyse einer Zeitreihe im Hinblick auf zyklische Schwankungen.

Weiter fallen die fehlenden Randwerte ins Auge. Da die Urdaten aus neun Jahren stammen, umfaßt die glatte Kurve "nur" einen Zeitraum von acht Jahren. Dabei möchte man eigentlich doch gern wissen, ob der Trend im ersten Halbjahr 1981 fallend oder steigend war. Vor allem aber möchte man am aktuellen Rand (also für das zweite Halbjahr 1989) wissen, ob die Trendkurve noch weiter bergauf geht oder abflacht. Dazu müssen Schätzwerte für die entsprechenden Stellen der geglätteten Zeitreihe gefunden werden. Wie dies geschehen kann, wird im 2. Abschnitt dieses Beitrages gezeigt.

Zur Glättung einer Zeitreihe kann man auch andere Methoden als die der  $(2k+1)$ - bzw.  $2k$ -gliedrigen gleitenden Mittelwertbildung einsetzen. So ist z.B. in der Ökonometrie die exponentielle Glättung weit verbreitet, eine einfach anzuwendende und für Schüler verstehbare Methode, die zudem später verfeinert werden kann. Bei der Analyse von Zeitreihen aus Klimavariablen besitzt die exponentielle Glättung außerdem einige Vorteile gegenüber der Glättung mit gleitenden Mittelwerten. Mit der Gestaltung einer entsprechenden Unterrichtssequenz befaßt sich der vierte Abschnitt dieses Beitrags.

## 2 Die Problematik: Randwerte und Trendbereinigung

### 2.1 Schätzwerte für den aktuellen Rand

Bei einem 12-gliedrigen gleitenden Mittel (wie im Beispiel von KIMBER) fehlen am Anfang und am Ende der geglätteten Zeitreihe jeweils  $k = 6$  Werte. Diese können geschätzt werden. Zur Bestimmung solcher Schätzwerte für den oberen Rand geht man von folgenden Kennwerten der vorliegenden Zeitreihe aus:

1. vom letzten durch Glättung bestimmbaren Wert, den wir hier mit  $\bar{y}_t - \bar{y}_{n-k}$  bezeichnen.
2. von einem Mittelwert  $\bar{y}_t^*$  der letzten Saisonperiode.

Zu 1: Im Beispiel von KIMBER ist der letzte geglättete Wert der gleitende Durchschnitt für Juni 1989 (Tab. 2 a.a.0., S. 13). Hier gilt also:  $\bar{y}_t = 11,0167$  (°C).

Zu 2: Im Beispiel liegen eindeutig saisonale Schwankungen im 12-Monats-Rhythmus vor. Es ist deshalb nicht angebracht, mit einem gewichteten Mittel für  $\bar{y}_t^*$  zu arbeiten, wie das bei Zeitreihen ohne saisonalen Einfluß üblich ist. Wir wählen als Mittelwert  $\bar{y}_t^*$  das normale arithmetische Mittel der Monatstemperaturen von

Januar 1989 bis Dezember 1989. Die Durchschnittstemperatur für 1989 betrug:  $\bar{y}_t = 10,93$  (°C).

### Berechnung der Schätzwerte für den oberen Rand:

$$\hat{y}(\text{Juli } 89) = \bar{y}_{t+1} = 3/2 \cdot \bar{y}_t - 1/2 \cdot \bar{y}_t^* = 1,5 \cdot 11,0167 - 0,5 \cdot 10,93 = 11,06 \text{ (°C)}$$

$$\hat{y}(\text{Aug. } 89) = \bar{y}_{t+2} = 4/2 \cdot \bar{y}_t - 2/2 \cdot \bar{y}_t^* = 11,10 \text{ (°C)}$$

$$\hat{y}(\text{Sept. } 89) = \bar{y}_{t+3} = 5/2 \cdot \bar{y}_t - 3/2 \cdot \bar{y}_t^* = 11,15 \text{ (°C)}$$

$$\hat{y}(\text{Okt. } 89) = \bar{y}_{t+4} = 6/2 \cdot \bar{y}_t - 4/2 \cdot \bar{y}_t^* = 11,19 \text{ (°C)}$$

$$\hat{y}(\text{Nov. } 89) = \bar{y}_{t+5} = 7/2 \cdot \bar{y}_t - 5/2 \cdot \bar{y}_t^* = 11,23 \text{ (°C)}$$

$$\hat{y}(\text{Dez. } 89) = \bar{y}_{t+6} = 8/2 \cdot \bar{y}_t - 6/2 \cdot \bar{y}_t^* = 11,28 \text{ (°C)}$$

Die nach diesem Verfahren errechneten Randwerte weisen u.a. darauf hin, daß der 1987 einsetzende Aufwärtstrend bei den Lufttemperaturen auch in der zweiten Hälfte von 1989 unvermindert anhält. Wir könnten nunmehr die Trendkurve in Abb. 1 des Aufsatzes von KIMBER nach rechts entsprechend verlängern.

Das Verfahren der Randwertbestimmung wirkt jedoch auf die Schüler zunächst wie ein "Rezept". Eine einfache Umformung legt jedoch die "Grundidee" offen:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} &= 3/2 \cdot \bar{y}_t - 1/2 \cdot \bar{y}_t^* = \bar{y}_t + 1/2 \cdot \bar{y}_t - 1/2 \cdot \bar{y}_t^* = \bar{y}_t + 1/2 \cdot (\bar{y}_t - \bar{y}_t^*) \\ \hat{y}_{t+2} &= 4/2 \cdot \bar{y}_t - 2/2 \cdot \bar{y}_t^* = \bar{y}_t + 2/2 \cdot \bar{y}_t - 2/2 \cdot \bar{y}_t^* = \bar{y}_t + 2/2 \cdot (\bar{y}_t - \bar{y}_t^*) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\text{Formel 1 zur Bestimmung des oberen Randwertes: } \hat{y}_{t+d} = \bar{y}_t + d/2 \cdot (\bar{y}_t - \bar{y}_t^*)$$

(d = Anzahl der Monate nach dem Zeitpunkt t)

Die Schüler sehen:

1. Das zur Bestimmung oberer Randwerte angewandte Verfahren stellt eine lineare Interpolation dar.
2. Die Differenz  $(\bar{y}_t - \bar{y}_t^*)$  legt bereits fest, ob die Trendkurve am oberen Rand steigt oder fällt. Es gilt:

Ist  $\bar{y}_t - \bar{y}_t^* > 0$ , dann *steigt* die Trendkurve.

Ist  $\bar{y}_t - \bar{y}_t^* < 0$ , dann *fällt* die Trendkurve.

Im Beispiel liegt die mittlere Lufttemperatur 1989 bei 10,93 °C, während der gleitende Zwölfmonatsdurchschnitt für Juni 1989 bereits 11,0167 °C beträgt. Diese Bedingungen stützen die Vermutung, daß der Trend in 1989 aufwärts gerichtet ist. Unsere errechneten Trend-Schätzwerte am oberen Rand sind also "glaubwürdig".

Die Formel 1 läßt sich noch verallgemeinern. Sie gilt ja nur für  $k = 6$ . Ersetzt man in Formel 1 den Nenner 2 durch  $k/3$ , dann erhält man eine allgemeine Formel zur Bestimmung oberer Randwerte mit  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Formel 2 zur Bestimmung von oberen Randwerten:  $\hat{y}_{t+d} = \bar{y}_t + \frac{3d}{k} \cdot (\bar{y}_t - \bar{y}_1^*)$

### Berechnung der Schätzwerte für den unteren Rand:

Im Beispiel der Lufttemperaturen von England und Wales gilt:

$$\bar{y}_7 = \bar{y}(\text{Juli 81}) = 9,675(^{\circ}\text{C}) \quad \bar{y}_1^* = \text{Jahresmittel 81} = 9,74(^{\circ}\text{C})$$

In Analogie zur Formel 1 berechnen wir Schätzwerte für den unteren Rand mit

Formel 3:  $\hat{y}_{7-d} = \bar{y}_7 - d/2 \cdot (\bar{y}_7 - \bar{y}_1^*)$

$$\hat{y}(\text{Juni 81}) = 9,675 - 1/2 \cdot (9,675 - 9,74) = 9,71 (^{\circ}\text{C})$$

$$\hat{y}(\text{Mai 81}) = 9,675 - 2/2 \cdot (9,675 - 9,74) = 9,74 (^{\circ}\text{C})$$

$$\hat{y}(\text{Apr. 81}) = 9,675 - 3/2 \cdot (9,675 - 9,74) = 9,77 (^{\circ}\text{C})$$

$$\hat{y}(\text{März 81}) = 9,675 - 4/2 \cdot (9,675 - 9,74) = 9,81 (^{\circ}\text{C})$$

$$\hat{y}(\text{Febr. 81}) = 9,675 - 5/2 \cdot (9,675 - 9,74) = 9,84 (^{\circ}\text{C})$$

$$\hat{y}(\text{Jan. 81}) = 9,675 - 6/2 \cdot (9,675 - 9,74) = 9,87 (^{\circ}\text{C})$$

## 2.2 Trendbereinigung und Saisonkomponente

Es ist angebracht, auch die soeben errechneten Randwerte für Januar bis Juni 1981 und für Juli bis Dezember 1989 mit in die Trendbereinigung einzubeziehen. Auf diese Weise kann man den Trend für den gesamten Zeitraum von 1981 bis 1989 berücksichtigen.

Wir wollen hier außerdem über die Vorschläge von KIMBER hinausgehen und auch Schätzwerte für die Saisonkomponente  $S_t$  bestimmen.

Bemerkungen zur Bestimmung der Saisonkomponente  $S_t$ :

1. Die Zeilenmittel  $Z_s$  (In KIMBERS Tabelle mit "Mean" bezeichnet) sind Schätzwerte für die Saisonkomponente. Im Unterricht sollten Hinweise zum Gebrauch der Laufvariablen  $s$  und  $t$  erfolgen. Da die Saisonperiode aus 12 Monaten besteht, durchläuft  $s$  die Zahlen von 1 bis 12.  $t$  beginnt bei 1 und endet im Beispiel von KIMBER bei  $9 \cdot 12 = 108$ . Die Saisonkomponente für Januar

1989 ist die gleiche wie die für Januar 1988, und diese ist gleich der Saisonkomponente für Januar 1987 usw.

Tabelle 1: Die trendbereinigte Zeitreihe und die Werte der Saisonkomponente für die monatlichen Lufttemperaturen in England und Wales

s Monat	Trendbereinigte Zeitreihe			Zeilenmittel $Z_s$	Schätzwerte für die Saisonkomponente $S_t$ $Z_s - \bar{Z}_s$
	1981	1982... 1988	1989		
1 Januar	-4,67		-3,89	-5,56	-5,55
2 Februar	-6,14		-4,36	-6,18	-6,17
3 März	-1,51		-3,07	-3,68	-3,67
4 April	-1,57	wie in	-4,07	-1,75	-1,74
5 Mai	1,86	Tab. 3	2,13	1,42	1,43
6 Juni	4,09	des	3,68	4,40	4,41
7 Juli	6,33	Aufsatzes	7,24	6,78	6,79
8 August	6,92	von	5,90	6,25	6,26
9 September	5,41	Kimber	3,95	4,23	4,24
10 Oktober	-0,75		1,11	1,00	1,01
11 November	-1,59		-4,03	-2,58	-2,75
12 Dezember	-8,38		-5,78	-4,39	-4,38

Zeilenmittel-Summe: -0,06

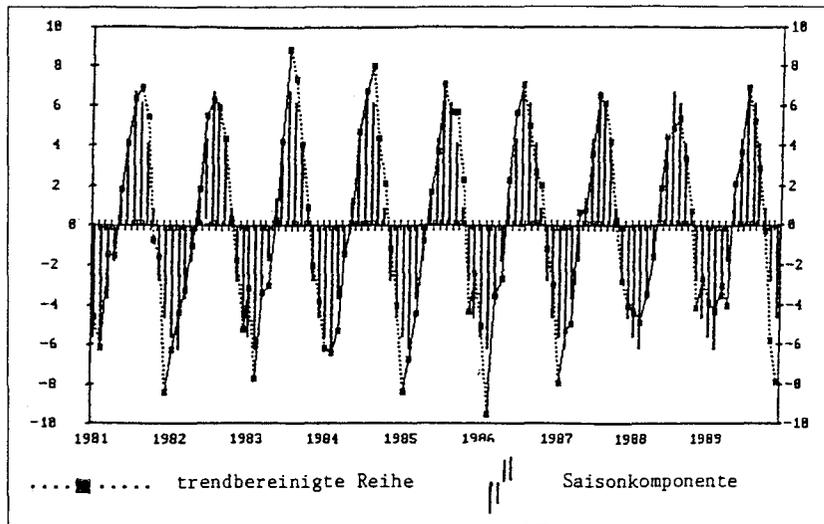
2. Ein Vergleich unserer Tabelle oben mit der Tabelle 3 von KIMBER zeigt, daß sich durch die Hinzunahme von 12 geschätzten Randwerten Änderungen der Saisonkomponente ergeben, und zwar teilweise in der Größenordnung von 0,1 oder 0,2 Kelvin. Je länger eine klimatologische Zeitreihe ist, desto robuster ist ihre Saisonfigur. Eine Hinzunahme von weiteren Beobachtungsjahren ruft bei einer langen Zeitreihe keine große Veränderung der Saisonkomponente hervor, es sei denn, es bahne sich eine auffallende Klimaänderung an.
3. Wenn die Randwerte fehlen oder nicht besonders gut geschätzt wurden, wird die Summe der Zeilenmittel erheblich von 0 abweichen. Dies trifft vor allem auf kurze Zeitreihen zu. In solchen Fällen bildet man den Durchschnitt der Zeilenmittel (oben "Z" genannt) und bestimmt mit  $S_t = Z_s - \bar{Z}_s$  genauere Werte der Saisonkomponente.  
Um dies Verfahren vorzustellen, wurde in der Tabelle die Korrektur mit dieser Differenz vorgenommen, obgleich die Zeilenmittel hier bereits recht gute Schätzer darstellen.

In Abb. 1 unten sind sowohl die trendbereinigte Reihe der Lufttemperaturen von England und Wales von 1981 bis 1989 als auch die Werte der zugehörigen Saisonkomponente dargestellt. Da sich die "Saisonfigur" von Jahr zu Jahr wieder-

holt, haben wir sie als Stabdiagramm abgebildet, während die trendbereinigte Zeitreihe als Kurve erscheint.

Aufmerksame Schüler hinterfragen dieses Verfahren: Ist es denn erlaubt, in allen Jahren die gleichen Werte für die saisonale Komponente anzusetzen? Ändert sich diese Komponente nicht mit der Zeit? Solche Fragen lassen sich im Unterricht ansatzweise diskutieren. Änderungen der Saisonkomponente bedeuten Klimaschwankungen oder -veränderungen. Dies aber sind langfristige Prozesse. In einer kurzen klimatologischen Zeitreihe (wie der von KIMBER) ist es sinnvoll, eine bestimmte Saisonkomponente anzunehmen. Zur Untersuchung von Klimaänderungen sind nur Zeitreihen geeignet, die Daten aus mehreren Jahrzehnten erfassen (vgl. unser nächstes Beispiel). In langen Zeitreihen kann man auch die Frage nach zyklischen Komponenten aufgreifen.

Abb. 1: Die trendbereinigte Reihe der Lufttemperaturen von England und Wales von 1981 bis 1989 mit der zugehörigen Saisonkomponente



Unsere Abb. 1 zeigt:

1. Die Schwankungen der trendbereinigten Reihe  $Z_t$  vollziehen sich eindeutig in einer Periode von 12 Monaten. Aber sie sind in den einzelnen Jahren unterschiedlich stark! Der sehr warme Sommer 1983 und der sehr kalte Winter

1985/86 fallen sofort ins Auge. Entsprechendes gilt für die sehr milden Winter 1987/88 und 1988/89.

2. Die Betrachtung von Abb. 1 führt direkt zum Begriff der Restkomponenten. Es gilt:  $Z_t - S_t = R_t$ . Bereinigt man eine Zeitreihe um die Trend- und Saisonkomponente, dann erhält man die Restkomponente. In unserem Beispiel sind dies auftretende Temperaturdifferenzen, die weder durch den nachgewiesenen Trend noch durch saisonale Einflüsse zu erklären sind.

### 2.3 Eine Arbeitstabelle für die Zeitreihenanalyse

Im Unterricht wird man nicht nur eine einzige Zeitreihe analysieren. Es ist daher notwendig und sinnvoll, den Schüler eine übersichtliche Arbeitstabelle an die Hand zu geben. Diese Tabelle muß deutlich den Grundgedanken der Zerlegung von  $y_t$  in die Komponenten  $T_t$ ,  $S_t$  und  $R_t$  erkennen lassen. Sie muß die trendbereinigte und die saisonbereinigte Zeitreihe enthalten. Im Unterricht des Verfassers hat sich die folgende Tabellenform bewährt (Tab. 2). Sie ist außerdem auf die Benutzung eines Tabellenkalkulationsprogramms zugeschnitten.

Eine Zeitreihenanalyse endet nicht mit dem Ausfüllen und Visualisieren der Spalten (4) bis (8). Jede der Zeitreihen in diesen Spalten sollte im Unterricht interpretiert werden. Die Zusammenfassung dieser Aussagen ist dann das eigentliche Ergebnis der Zeitreihenanalyse.

In unserer Tab. 2 werden noch einmal die Lufttemperaturen von England und Wales dargestellt, um die Ergänzungen zum Aufsatz von Kimber zu verdeutlichen.

Die Anlage einer solchen Tabelle erfordert einen erheblichen Rechenaufwand. Für solche Zwecke stehen den meisten Schulen heute Rechner und integrierte Softwarepakete zur Verfügung, die u.a. ein Tabellenkalkulations- und ein Grafikprogramm enthalten. Wir haben z.B. MS-WORKS benutzt. Überhaupt sollte man darauf hinweisen, daß ein Tabellenkalkulationsprogramm bei der Zeitreihenanalyse eine wertvolle Hilfe ist. Einerseits wird den Schüler nicht die Denkarbeit abgenommen, andererseits werden jedoch die notwendigen Rechnungen blitzschnell ausgeführt. Die anschließende Visualisierung ist mit einem integrierten Programm ebenfalls bald durchgeführt.

Tab. 2: Arbeitstabelle für eine Zeitreihenanalyse nach dem Modell:  $y_t = T_t + S_t + R_t$

(1) Monat und Laufvariable $t$	(2) Zeitreihe $y_t$	(3) Trend- Komponente $T_t$	(4) trendbereinigte Zeitreihe $y_t - T_t$	(5) Saison- komponente $S_t$	(6) saisonbereinigte Zeitreihe $y_t - S_t$	(7) Rest- komponente $y_t - T_t - S_t$	
Jan. 81	1	5,2	9,87	-4,67	-5,55	10,75	0,88
Feb. 81	2	3,7	9,84	-6,14	-6,17	9,87	0,03
März 81	3	8,3	9,81	-1,51	-3,67	11,97	2,16
Apr. 81	4	8,2	9,77	-1,57	-1,74	9,94	0,17
Mai 81	5	11,6	9,74	1,86	1,43	10,17	0,43
Juni 81	6	13,8	9,71	4,09	4,41	9,39	-0,32
Juli 81	7	16,0	9,68	6,33	6,79	9,21	-0,46
Aug. 81	8	16,6	9,68	6,92	6,26	10,34	0,66
Sept. 81	9	15,1	9,69	5,41	4,24	10,86	1,17
Okt. 81	10	8,9	9,65	-0,75	1,01	7,89	-1,76
Nov. 81	11	8,1	9,69	-1,59	-2,57	10,67	0,98
Dez. 81	12	1,4	9,78	-8,38	-4,38	5,78	-4,00
Jan. 82	13	3,6	9,89	-6,29	-5,55	9,15	-0,74
Feb. 82	14	5,5	9,92	-4,42	-6,17	11,67	1,75
März 82	15	6,6	9,90	-3,30	-3,67	10,27	0,37
Apr. 82	16	8,9	9,96	-1,00	-1,74	10,64	0,74
Mai 82	17	11,9	10,05	1,85	1,43	10,47	0,42
Juni 82	18	15,7	10,21	5,49	4,41	11,29	1,08
Juli 82	19	16,8	10,50	6,30	6,79	10,01	-0,49
Aug. 82	20	16,4	10,52	5,88	6,26	10,14	-0,38
Sept. 82	21	14,8	10,42	4,38	4,24	10,56	0,14
Okt. 82	22	10,7	10,37	0,33	1,01	9,69	-0,68
Nov. 82	23	8,5	10,25	-1,74	-2,57	11,07	0,83
Dez. 82	24	4,9	10,15	-5,25	-4,38	9,28	-0,87
Jan. 83	25	7,0	10,20	-3,20	-5,55	12,55	2,35
Feb. 83	26	2,6	10,35	-7,75	-6,17	8,77	-1,58
März 83	27	7,0	10,38	-3,38	-3,67	10,67	0,29
Apr. 83	28	7,3	10,36	-3,06	-1,74	9,04	-1,32
Mai 83	29	10,6	10,36	0,24	1,43	9,17	-1,19
Juni 83	30	14,6	10,40	4,20	4,41	10,19	-0,21
usw.							

### 3 Glättung mit gewichteten, gleitenden Mittelwerten

#### 3.1 Fortführung des Beispiels von KIMBER

Das Beispiel Lufttemperaturen in England und Wales enthält die Fragestellung, ob sich aus den vorgelegten Daten etwas über langfristig angelegte Klimaänderungen herauslesen läßt, ob sich etwa eine langsame Erwärmung anbahnt. Deshalb ist die Richtung des Trends am Ende der Zeitreihe von besonderem Interesse.

Sind im Unterricht an früherer Stelle schon einmal gewichtete, gleitende Mittelwerte aufgetreten, könnten Schüler auf den Gedanken kommen, diese Methode auch hier anzuwenden, evtl. mit der Begründung: "Dann kommt der Trend noch besser heraus". Wenn die Zeitreihen-Daten (hier die monatlichen Lufttemperaturen von England und Wales von 1981 bis 1989) bereits eingegeben sind und die

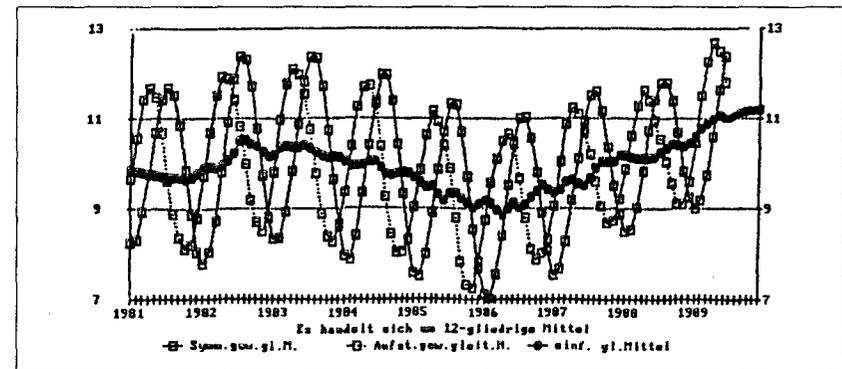
Schüler den Umgang mit den entsprechenden Programmen beherrschen, macht es wenig Mühe, den Vorschlag versuchsweise noch einmal aufzugreifen.

Im Beispiel der monatlichen Lufttemperaturen könnte es zweckdienlich sein, die Gewichtung wie folgt vorzunehmen:

<p>Symmetrisch gewichtetes 12-gliedriges gleitendes Mittel</p> $\bar{y}_t = \frac{1}{2} \cdot y_{t-6} + 2 \cdot y_{t-5} + 3 \cdot y_{t-4} + 4 \cdot y_{t-3} + 5 \cdot y_{t-2} + 6 \cdot y_{t-1} + 7 \cdot y_t + 6 \cdot y_{t+1} + 5 \cdot y_{t+2} + 4 \cdot y_{t+3} + 3 \cdot y_{t+4} + 2 \cdot y_{t+5} + \frac{1}{2} \cdot y_{t+6} : 48$	<p>Aufsteigend gewichtetes 12-gliedriges gleitendes Mittel</p> $\bar{y}_t = \frac{1}{2} \cdot y_{t-6} + 2 \cdot y_{t-5} + 3 \cdot y_{t-4} + 4 \cdot y_{t-3} + 5 \cdot y_{t-2} + 6 \cdot y_{t-1} + 7 \cdot y_t + 8 \cdot y_{t+1} + 9 \cdot y_{t+2} + 10 \cdot y_{t+3} + 11 \cdot y_{t+4} + 12 \cdot y_{t+5} + \frac{13}{2} \cdot y_{t+6} : 84$
---	---

Das Erstaunen wird bei den meisten Schüler groß sein, wenn sie sich die Kurven ansehen, die sie mit den eben genannten gewichteten Mitteln erzeugt haben (vgl. dazu die Abb. 2).

Abb. 2: Lufttemperaturen in England und Wales:  
Kurven für drei verschiedene gleitende Mittel



In der Abb. 2 ist gut zu sehen, daß die gewichteten gleitenden Mittel im Beispiel der monatlichen Lufttemperaturen keine Trendlinien erzeugen, sondern Kurven, die relativ stark die 12monatige Saisonperiode reproduzieren. Die beiden Kurven der nach unterschiedlichen Prinzipien gewichteten Mitteln sind gegeneinander zeitverschoben.

Im Unterrichtsgespräch sollten beide Phänomene geklärt werden. Ganz wichtig ist die Einsicht:

**Liegen saisonale Einflüsse vor, dann können mit gewichteten gleitenden Mitteln keine Trendlinien erzeugt werden. In solchen Fällen benutzt man einfach gleitende Mittel oder wendet andere Methoden zur Trendbestimmung an.**

Sind jedoch saisonale Einflüsse eliminiert oder liegen sie von vornherein gar nicht vor, dann kann es vorteilhaft sein, gewichtete gleitende Mittel zur Trendbestimmung einzusetzen. Wir zeigen dies am Beispiel der Jahres-Lufttemperaturen von England und Wales (vgl. Tabelle 3 und die Abb. 3 bis 5).

Tab. 3: Mittlere Lufttemperaturen in England und Wales

1951-80	9,74
1981	9,74
1982	10,36
1983	10,46
1984	9,99
1985	9,23
1986	9,13
1987	9,48
1988	10,19
1989	10,93

Die Temperaturen wurden aus den Daten der Tab. 1 von KIMBER berechnet.

In den Abbildungen 3 bis 5 wurde das Problem "Trendwerte am unteren Rand" jeweils dadurch gelöst, daß die Zeitreihe in dem "Dreißig-Jahres-Mittel für 1951-1980 verankert wurde.

Die Abbildungen 3 und 4 zeigen, daß gewichtete gleitende Mittel den jeweils aktuellen Trend stärker herausarbeiten. Die zugehörigen Trendkurven zeigen größere Schwankungen als die Trendkurve aus einfachen gleitenden Mitteln. In Abbil-

dung 5 sieht man, daß aufsteigende gleitende Mittel eine Trendumkehr frühzeitiger anzeigen, als dies bei symmetrischen gleitenden Mitteln der Fall ist.

Abb.3: Lufttemperaturen in England und Wales: Trendkurve mit Hilfe symmetrischer Mittel

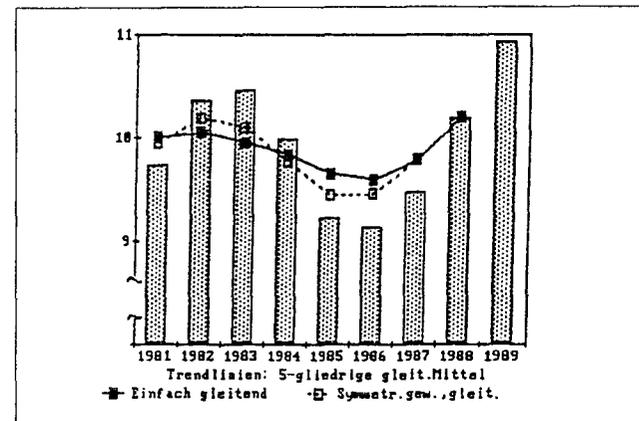


Abb.4: Lufttemperaturen in England und Wales :Trendkurve mit Hilfe aufsteigender Mittel

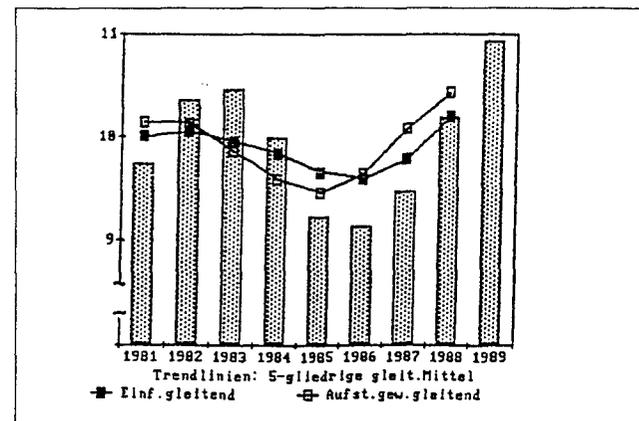
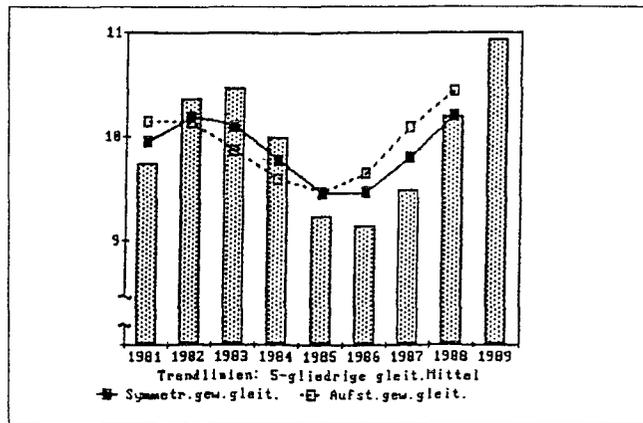


Abb.5: Vergleich der Trendkurven aus symmetrischen und aufsteigenden Mitteln



### 3.2 Die Analyse der Zeitreihe "Lufttemperaturen in Nordwest-Deutschland von 1961 bis 1992"

In unserem Beitrag klang an mehreren Stellen an, daß die von KIMBER gewählte Zeitreihe zu kurz ist, um daraus weitreichende klimatologische Aussagen zu gewinnen. Aus diesem Grunde bieten wir hier eine andere Zeitreihe an, die Daten aus mehr als drei Jahrzehnten umfaßt und sich außerdem noch in einem vorangehenden Dreißig-Jahres-Mittel verankern läßt (vgl. Tab. 4).

Die Lufttemperaturen Nordwest-Deutschland wählten wir aus folgenden Gründen aus:

- England, Wales und NW-Deutschland liegen der gleichen Klimazone mit milden Wintern und mäßig warmen Sommern.
- In den drei Gebieten dominiert der maritime Einfluß.
- Die kurze Zeitreihe von Kimber läßt sich unter bestimmten Randbedingungen in die weitaus längere Zeitreihe der Lufttemperaturen von NW-Deutschland "einbetten".

Es sind weitere Vorbemerkungen notwendig:

- Als Lufttemperatur NW-Deutschland wird hier vom einfachen arithmetischen Mittel der entsprechenden Lufttemperaturen der Stationen Bremen (Flughafen), Essen und Hannover-Langenhagen ausgegangen. Diese Stationenwahl ist zwar etwas grob, die gewonnen Daten sind jedoch hinreichend aussagekräftig.

- die Urdaten, im Beispiel die Lufttemperaturen von Bremen, Essen, Hannover wurden aus den entsprechenden Jahrgängen des Statistischen Jahrbuchs der Bundesrepublik Deutschland herausgesucht. Diese Jahrbücher enthalten in ihrem I. Abschnitt "Geographische und meteorologische Angaben" stets die jeweils neuesten klimatologischen Daten (u.a. monatliche mittlere Lufttemperaturen, Niederschlagsmengen, Sonnenscheindauer) einer Reihe deutscher Wetterstationen. Es ist also relativ einfach möglich, die Tabelle 4 bei Bedarf und Interesse in den nächsten Jahren fortzuschreiben.

Tab. 4: Lufttemperaturen in Nordwest-Deutschland

Jahr	Jahresmittel in °C	Sommermittel in °C
1931-60	9,1	16,8
1961	9,7	15,9
1962	7,8	14,8
1963	7,8	16,6
1964	9	17,0
1965	8,4	15,3
1966	9,2	16,5
1967	9,9	17,0
1968	9,1	16,8
1969	8,8	17,3
1970	8,7	17,2
1971	9,5	16,9
1972	8,8	16,3
1973	9,3	17,8
1974	9,8	16,0
1975	10,0	18,3
1976	9,5	18,4
1977	9,6	16,4
1978	8,7	15,5
1979	8,2	15,8
1980	8,6	15,9
1981	8,9	16,2
1982	9,8	17,7
1983	9,9	18,6
1984	9,0	16,0
1985	8,2	15,7
1986	8,7	16,8
1987	8,2	15,6
1988	9,9	16,3
1989	10,5	17,3
1990	10,5	17,1
1991	9,2	16,9
1992	10,3	18,7

- Temperaturdaten der genannten Stationen werden täglich in fast allen großen deutschen Zeitungen veröffentlicht, so daß die Schüler auch während des Unterrichtsvorhabens die aktuelle Witterung NW-Deutschlands verfolgen können, dies ggf. sogar langfristig.

Tabelle 4 enthält zwei Zeitreihen, nämlich die Jahrestemperaturen in NW-Deutschland von 1961 bis 1992 und die der zugehörigen "Sommermittel". Darunter wird hier der Durchschnitt der Monatsmittel von Juni, Juli, August verstanden. Wir wenden uns in diesem Beitrag nur der Analyse der Jahrestemperaturen zu, die andere Zeitreihe sei als "Material" gedacht.

Unterrichtsgang:

1. Eine Vorüberlegung im Unterrichtsgespräch führt die Schüler schnell zu der Einsicht, daß es sich um eine Zeitreihe **ohne** saisonale Einflüsse handelt. Es könnten langfristige zyklische Schwankungen vorliegen, die aber zunächst im Datenmaterial ohne weiteres nicht zu erkennen sind. Als Zerlegungsmodell werden die Schüler vorschlagen:

$$(1) y_t = T_t + R_t \quad \text{oder} \quad (2) y_t = T_t + P_t + R_t$$

mit  $P$  = zyklische Komponente ( $\hat{=}$  periodische Komp.)

2. Es wird zunächst das einfachere Zerlegungsmodell angewendet. Die Schüler legen entsprechende Arbeitstabellen an und bestimmen (ggf. in Gruppenarbeit) Trendreihen nach unterschiedlichen Verfahren, indem sie einfache oder

gewichtete gleitende Mittel bilden, danach Trendbereinigungen durchführen und Restkomponenten berechnen. Einige Möglichkeiten sind in Tabelle 5 dargestellt.

3. Anschließend wird diskutiert, welche Trendreihe der weiteren Analyse zugrunde gelegt werden soll. Wir wählen hier eine durch symmetrische gewichtete gleitende Mittelwertbildung entstandene Trendreihe (Tab. 5, Spalte 8). Der visuelle Vergleich der Zeitreihen aus Spalte 6 und Spalte 8 (vgl. Abb. 6 und 7) zeigt, daß die Trendreihe aus Spalte 8 noch etwas glatter und "gefälliger" ist als die andere Trendkurve.

4. Nun beginnt eine Zeitreihenanalyse nach dem Zerlegungsmodell mit drei Komponenten. Die Arbeitstabelle aus Abschnitt 2.2 dient uns als Leitmuster. Der gravierende Unterschied zum Beispiel vorn ist jedoch, daß die Länge des angenommenen Zyklus nicht bekannt ist. Beim Beispiel von KIMBER war eindeutig klar, daß eine 12monatige Saisonperiode vorliegt. Jetzt dagegen setzt "forschender" Unterricht ein. Schüler werden aufgefordert, Vorschläge zur Bestimmung der Periodenlänge für einen vermuteten Zyklus zu erarbeiten.

Ein mögliches, effektives Vorgehen ist systematisches Probieren, etwa in folgender Form:

- Man beginnt damit, einen 3jährigen Zyklus zu vermuten, danach vermutet man einen 4jährigen Zyklus usw.
- Die Jahre von 1961 bis 1992 werden in jeweils n Jahre lange Perioden eingeteilt.
- Die  $R_t$ -Daten unserer symmetrisch gewichteten 11gliedrigen gleitenden Mittelwertbildung aus Tabelle 5 (Spalte 9) werden in Blockform geordnet aufgeschrieben.
- Die  $R_t$ -Daten werden zeilenweise auf Übereinstimmung durchgemustert.
- Bei auffallenden Übereinstimmungen wird ein n-jähriger Zyklus angenommen.

Das Verfahren ist auf den folgenden Seiten als Übersicht dargestellt. Wir kommen zu der Annahme, daß bei den Lufttemperaturen in NW-Deutschland seit 1961 eine 8jährige Schwingung nachzuweisen ist.

Die neue Arbeitstabelle (vgl. Tabelle 6) wird nun ausgefüllt, ggf. wird ein Tabellenkalkulationsprogramm eingesetzt.

5. Die Ergebnisse dieser Zeitreihenanalyse werden interpretiert.

Tab. 5: Lufttemperaturen in Nordwest-Deutschland von 1961-1992. Trendbestimmung und Trendbereinigung, 3 Beispiele

(1) Jahr	(2) t	(3) Zeitreihe $y_t$	(4) Trend-( $T_t$ ) und Restkomponente ( $R_t$ )				(8) symmetr. gleitendes 11gliedriges Mittel		(9) $R_t$
			Einfache 7gliedrig $T_t$	gleitende Mittel $R_t$	11gliedrig $T_t$	$R_t$	$T_t$	$R_t$	
1931-60		9,1	-	-	-	-	-	-	-
1961	1	9,7	8,8	0,9	8,9	0,8	8,8	0,9	
1962	2	7,8	8,8	-1,0	8,9	-1,1	8,7	-0,9	
1963	3	7,8	8,7	-0,9	8,9	-1,1	8,7	-0,9	
1964	4	9,0	8,8	0,2	8,9	0,1	8,8	0,2	
1965	5	8,4	8,7	-0,3	8,9	-0,5	8,8	-0,4	
1966	6	9,2	8,9	0,3	8,9	0,3	8,9	0,3	
1967	7	9,9	9,0	0,9	8,8	1,1	9,0	0,9	
1968	8	9,1	9,1	0	9,0	0,1	9,1	0	
1969	9	8,8	9,1	-0,3	9,1	-0,3	9,1	-0,3	
1970	10	8,7	9,2	-0,5	9,2	-0,5	9,1	-0,4	
1971	11	9,5	9,1	0,4	9,3	0,2	9,2	0,3	
1972	12	8,8	9,3	-0,5	9,4	-0,6	9,3	-0,5	
1973	13	9,3	9,4	-0,1	9,3	0	9,3	0	
1974	14	9,8	9,4	0,4	9,2	0,6	9,4	0,4	
1975	15	10,0	9,5	0,5	9,2	0,8	9,4	0,6	
1976	16	9,5	9,3	0,2	9,2	0,3	9,3	0,2	
1977	17	9,6	9,2	0,4	9,2	0,4	9,2	0,4	
1978	18	8,7	9,1	-0,4	9,3	-0,6	9,1	-0,4	
1979	19	8,2	9,0	-0,8	9,3	-1,1	9,1	-0,9	
1980	20	8,6	9,1	-0,5	9,1	-0,5	9,0	-0,4	
1981	21	8,9	9,0	-0,1	9,0	-0,1	9,0	-0,1	
1982	22	9,8	8,9	0,9	8,9	0,9	9,0	0,8	
1983	23	9,9	9,0	0,9	8,9	1,0	9,0	0,9	
1984	24	9,0	9,0	0	9,1	-0,1	9,0	0	
1985	25	8,2	9,1	-0,9	9,3	-1,1	9,1	-0,9	
1986	26	8,7	9,2	-0,5	9,3	-0,6	9,2	-0,5	
1987	27	8,2	9,3	-1,1	9,5	-1,3	9,3	-1,1	
1988	28	9,9	9,3	0,6	9,6	0,3	9,4	0,5	
1989	29	10,5	9,6	0,9	9,7	0,8	9,5	1,0	
1990	30	10,5	9,8	0,7	9,8	0,7	9,7	0,8	
1991	31	9,2	10,0	-0,8	9,9	-0,7	9,8	-0,6	
1992	32	10,3	10,1	0,2	10,0	0,3	9,9	0,4	
Mittelwerte und Summen		$\bar{y}(61-92)$ = 9,17	$\bar{T}(61-92)$ = 9,18	$\sum R_t$ = -0,3	$\bar{T}(61-92)$ = 9,22	$\sum R_t$ = -1,5	$\bar{T}(61-92)$ = 9,16	$\sum R_t$ = 0,3	

Zur Bestimmung der Trendschätzwerte am aktuellen Rand: Das es sich in diesem Beispiel um eine saisonfreie Zeitreihe handelt, wenden wir eine andere Methode zur Bestimmung der Randwerte an, als weiter vorn dargestellt. Außerdem wurde der Anfang der Trendreihen in den Dreißig-Jahres-Mitteln für 1931-1960 verankert, so daß nur obere Randwerte zu berechnen sind.

Formel zur Berechnung von Randwerten bei saisonfreien Zeitreihen :

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{n-k} + \frac{t+k-n}{2k} \cdot \text{Trenddifferenz}$$

Es bedeuten:

$\bar{y}_t$  = Trendschätzwert an der Stelle  $t$ , wobei  $t > n - k$ ,

$\bar{y}_{n-k}$  = letzter durch die gleitende Mittelwertbildung erfaßter Trendwert

Trenddifferenz = Mittel aus den letzten  $k$  Zeitreihendaten *minus* Mittel aus den letzten  $n-2k$  bis  $n-k-1$  Zeitreihenwerten

Randwertbestimmung für Spalte 4:  
Für das gleitende 7gliedrige Mittel gilt:

$$k = 3$$

$$\bar{y}_{n-k} = \bar{y}_{29} = 9,6(^{\circ}\text{C})$$

$$\frac{t+k-n}{2k} = \frac{t-29}{6}$$

Trenddifferenz = Mittel aus  $y_{30}$ ,  $y_{31}$  u.  $y_{32}$   
*minus* Mittel aus  $y_{26}$ ,  $y_{27}$  u.  $y_{28}$   
=  $10,00 - 9,93 = 1,07$

Damit heißen die Trendschätzwerte:

$$\hat{y}_{30} = 9,6 + 1/6 \cdot 1,07 = 9,78$$

$$\hat{y}_{31} = 9,6 + 2/6 \cdot 1,07 = 9,96$$

$$\hat{y}_{32} = 9,6 + 3/6 \cdot 1,07 = 10,14$$

Randwertbestimmung für  
Spalte 6: analog!

Randwertbestimmung für Spalte 8:  
Für das symmetr. gewichtete 11gliedrige  
gleitende Mittel gilt:

$$k = 5$$

$$\bar{y}_{n-k} = \bar{y}_{27} = 9,3(^{\circ}\text{C})$$

$$\frac{t+k-n}{2k} = \frac{t-27}{10}$$

Trenddifferenz = Aufsteigend gewichtetes  
gleit. Mittel von  $y_{22}$  bis  $y_{26}$  *minus* aufst.  
gewicht. gleit. Mittel von  $y_{28}$  bis  $y_{32}$   
=  $10,05 - 8,86 = 1,19$

Damit heißen die Trendschätzwerte:

$$\hat{y}_{28} = 9,3 + 1/10 \cdot 1,19 = 9,42$$

$$\hat{y}_{29} = 9,3 + 2/10 \cdot 1,19 = 9,54$$

$$\hat{y}_{30} = 9,3 + 3/10 \cdot 1,19 = 9,66$$

$$\hat{y}_{31} = 9,3 + 4/10 \cdot 1,19 = 9,78$$

$$\hat{y}_{32} = 9,3 + 5/10 \cdot 1,19 = 9,90$$

Visueller Vergleich der nach Spalte 6 bzw. Spalte 8 bestimmten Trends: Die Abbildungen 6 und 7 zeigen die Lufttemperaturen NW-Deutschlands von 1961 bis 1992 als Stabdiagramm und zusätzlich jeweils eine Trendkurve. Die aus der symmetrisch gewichteten Mittelwertbildung (Abb. 7) hervorgegangene Trendlinie gibt eher wieder, daß der Trend offensichtlich noch von langjährigen Schwingungen überlagert ist. Wir wählen deshalb die in Spalte 8 der Tabelle 5 bestimmte Trendreihe aus, um nunmehr noch neben dem Trend eine zyklische Komponente zu bestimmen.

Abb. 6: Trendbestimmung durch 11gliedrige gleitende Mittelwerte

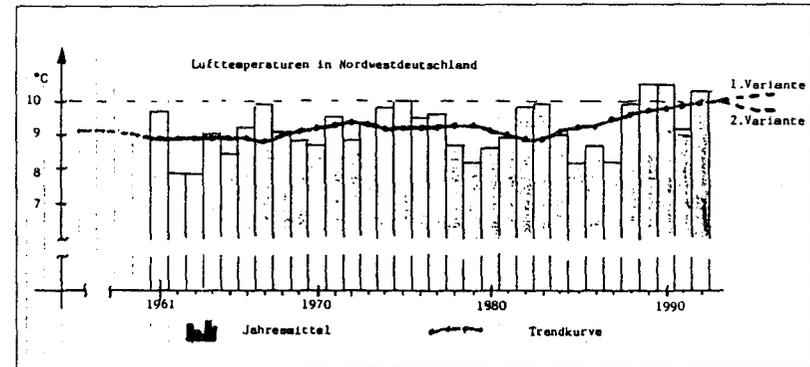
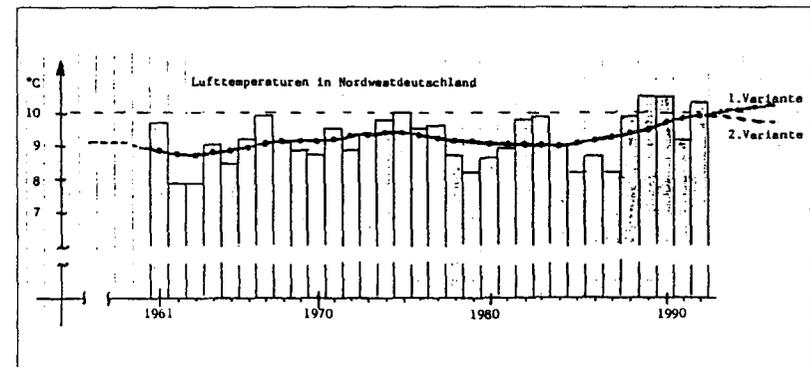


Abb. 7: Trendbestimmung durch symmetrisch gewichtete 11gliedrige Mittelwerte



Ein Zyklus wird gesucht:

3jähriger Zyklus?					4jähriger Zyklus?				
61 - 63	64 - 66	67 - 69	70 - 72	73 - 75	61 - 64	65 - 68	69 - 72	73 - 76	77 - 80
0,9	0,2	0,9	-0,4	0	0,9	-0,4	-0,3	0	0,4
-0,9	-0,4	0	0,3	0,4	-0,9	0,3	-0,4	0,4	-0,4
-0,9	0,3	-0,3	-0,5	0,6	-0,9	0,9	0,3	0,6	-0,9
					0,2	0	-0,5	0,2	-0,4
abgebrochen, Zeilenwerte streuen zu sehr					abgebrochen, Zeilenwerte streuen zu sehr				
5jähriger Zyklus?					6jähriger Zyklus?				
61 - 65	66 - 70	71 - 75	76 - 80	81 - 85	61 - 66	67 - 72	73 - 78	79 - 84	85 - 90
0,9	0,3	0,3	0,2	-0,1	0,9	0,9	0	-0,9	-0,9
-0,9	0,9	-0,5	0,4	0,8	-0,9	0	0,4	-0,4	-0,5
-0,9	0	0	-0,4	0,9	-0,9	-0,3	0,6	-0,1	-1,1
0,2	-0,3	0,4	-0,9	0	0,2	-0,4	0,2	0,8	0,5
-0,4	-0,4	0,6	-0,4	-0,9	-0,4	0,3	0,4	0,9	1,0
					0,3	-0,5	-0,4	0	0,8
abgebrochen Zeilenwerte streuen zu sehr					Vermutung verworfen: Zeilenwerte streuen zu sehr				
7jähriger Zyklus?					8jähriger Zyklus?				
61 - 67	68 - 74	75 - 81	82 - 88	89 - 95	61 - 68	69 - 76	77 - 84	85 - 92	
0,9	0	0,6	0,8	1,0	0,9	-0,3	0,4	-0,9	
-0,9	-0,3	0,2	0,9	0,8	-0,9	-0,4	-0,4	-0,5	
-0,9	-0,4	0,4	0	-0,6	-0,9	0,3	-0,9	-1,1	
0,2	0,3	-0,4	-0,9	0,4	0,2	-0,5	-0,4	0,5	
-0,4	-0,5	-0,9	-0,5		-0,4	0	-0,1	1,0	
0,3	0	-0,4	-1,1		0,3	0,4	0,8	0,8	
0,9	0,4	-0,1	0,5		0,9	0,6	0,9	-0,6	
					0	0,2	0	0,4	
Vermutung verworfen: Zeilenwerte streuen zu sehr					In fast allen Zeilen stimmen die Werte gut überein! Vermutung bestätigt!				

Tab. 6: Lufttemperaturen in Nordwest-Deutschland von 1961 bis 1992  
Zerlegung dieser Zeitreihe in a) drei, b) vier Komponenten

(1) Jahr und Laufvariable	(2) t	(3) Zeitreihe y <sub>t</sub>	a) Zerlegung in drei Komponenten				b) vier Komponenten	
			(4) Trend- komponente T <sub>t</sub>	(5) trend- bereinigte Zeitreihe y <sub>t</sub> - T <sub>t</sub>	(6) *) Zyklische Komponente P <sub>t</sub>	(7) Rest- komponente R <sub>t</sub>	(8) **) Zyklische Komponente P <sub>2t</sub>	(9) 2. Rest- komponente R <sub>2t</sub>
1961	1	9,7	8,8	0,9	0	0,9	-0,2	1,1
1962	2	7,8	8,7	-0,9	-0,6	-0,3	-0,1	-0,2
1963	3	7,8	9,7	-0,9	-0,7	-0,2	-0,2	0
1964	4	9,0	8,8	0,2	-0,1	0,3	0,2	0,1
1965	5	8,4	8,8	-0,4	0,1	-0,5	0,4	-0,9
1966	6	9,2	8,9	0,3	0,6	-0,3	-0,1	-0,2
1967	7	9,9	9,0	0,9	0,5	0,4	-0,2	0,6
1968	8	9,1	9,1	0	0,2	-0,2	-0,1	-0,1
1969	9	8,8	9,1	-0,3	0	-0,3	-0,2	-0,1
1970	10	8,7	9,1	-0,4	-0,6	0,2	0,2	0
1971	11	9,5	9,2	0,3	-0,7	1,0	0,4	-0,6
1972	12	8,8	9,3	-0,5	-0,1	-0,4	-0,1	-0,3
1973	13	9,3	9,3	0	0,1	-0,1	-0,2	0,1
1974	14	9,8	9,4	0,4	0,6	-0,2	-0,1	-0,1
1975	15	10,0	9,4	0,6	0,4	-0,1	-0,2	0,1
1976	16	9,5	9,3	0,2	0,2	0	0,2	-0,2
1977	17	9,6	9,2	0,4	0	0,4	0,4	0
1978	18	8,7	9,1	-0,4	-0,6	0,2	-0,1	0,3
1979	19	8,2	9,1	-0,9	-0,7	-0,2	-0,2	0
1980	20	9,6	9,0	-0,4	-0,1	-0,3	-0,1	-0,2
1981	21	8,9	9,0	-0,1	0,1	-0,2	-0,2	0
1982	22	9,8	9,0	0,8	0,6	0,2	0,2	0
1983	23	9,9	9,0	0,9	0,5	0,4	0,4	0
1984	24	9,0	9,0	0	0,2	-0,2	-0,1	-0,1
1985	25	8,2	9,1	-0,9	0	-0,9	-0,2	-0,7
1986	26	8,7	9,2	-0,5	-0,6	0,1	-0,1	0,2
1987	27	8,2	9,3	-1,1	-0,7	-0,4	-0,2	-0,2
1988	28	9,9	9,4	0,5	-0,1	0,6	0,2	0,4
1989	29	10,5	9,5	1,0	0,1	0,9	0,4	0,5
1990	30	10,5	9,7	0,8	0,6	0,2	-0,1	0,3
1991	31	9,2	9,8	-0,6	0,5	-1,1	-0,2	-0,9
1992	32	10,3	9,9	0,4	0,2	0,2	-0,1	0,3
				$\sum_t  y_t - T_t $ = 16,9	*) vgl. Tab. 7	$\sum_t  R_t $ = 11,9	***) vgl. Tab. 8	$\sum_t  R_{2t} $ = 8,8

## Bestimmung der zyklischen Komponenten

Tab. 7: Bestimmung der zyklischen Komponenten (8jährige Periode)

Laufvariable des Zyklus $s$	Werte der trendbereinigten Zeitreihe $y_t - T_t$				Zeilenmittel $Z_{7s}$	Zyklische Komponente $P_t$
	61-68	69-76	77-84	85-92		
1	0,9	-0,3	0,4	-0,9	0,025	0
2	-0,9	-0,4	-0,4	-0,5	-0,550	-0,6
3	-0,9	0,3	-0,9	-1,1	-0,650	-0,7
4	0,2	-0,5	-0,4	0,5	-0,050	-0,1
5	-0,4	0	-0,1	1,0	0,125	0,1
6	0,3	0,4	0,8	0,8	0,575	0,6
7	0,9	0,6	0,9	-0,6	0,450	0,5
8	0	0,2	0	0,4	0,150	0,2
Summe:					0,075	0
(vernachlässigt)						

In Tabelle 7 wird die zyklische Komponente  $P_t$  bestimmt. Mustert man die Zykluswerte durch, dann fällt auf, daß das jeweils 2. und 3. Jahres eines 8-jährigen Zyklus erheblich zu kalt und das 6. und 7. Jahr erheblich zu warm ausfielen (bis auf ganze wenige Ausnahmen). Es ist allerdings die Frage, ob sich diese 8jährige Temperaturschwingung in den nächsten Jahrzehnten fortsetzen wird.

Tab. 8: Bestimmung der zweiten zyklischen Komponente  $P_{2t}$   
Überlagerung durch eine zweite 6jährige Periode

Laufvariable des Zyklus $s$	Werte der trend- und zyklusbereinigten Zeitreihe $y_t - T_t - P_t$						Zeilenmittel $Z_{7s}$	Zyklische Komponente $P_{2t}$
	61-66	67-72	73-78	79-84	85-90	91/92		
1	0,9	0,4	-0,1	-0,2	-0,9	-1,1	-0,167	-0,2
2	-0,3	0,2	-0,2	-0,3	0,1	0,2	-0,117	-0,1
3	-0,2	-0,3	-0,1	-0,2	-0,4		-0,240	-0,2
4	0,3	0,2	0	0,2	0,6		0,260	0,2
5	-0,5	1,0	0,4	0,4	0,9		0,440	0,4
6	-0,3	-0,4	0,2	-0,2	0,2		-0,100	-0,1
Zeilenmittel- Summe:							0,076	0
							0,076: 6 = 0,013	

Die Bestimmung einer zweiten zyklischen Komponente überfordert vermutlich die meisten Schüler im Sek. I-Bereich. Sie ist für unsere Leserinnen und Leser gedacht (vgl. Tab. 8)

## Interpretation der Ergebnisse

Wir zerlegten die Zeitreihe der Lufttemperaturen Nordwestdeutschlands von 1961 bis 1992 nach einem additiven Modell in die Komponenten Trend, Zyklus und Rest. Dabei benutzen wir zur Bestimmung des Trends eine symmetrisch gewichtete 11gliedrige gleitende Mittelwertbildung. Die mittlere lineare Abweichung der Zeitreihenwerte von den Trendwerten beträgt  $16,9 : 32 = 0,5$  (Kelvin). Das sind relativ geringe Abweichungen. Auffallend ist: Die Trendkurve zeigt wellenförmige Schwankungen mit einem Maximum in 1974/5 und einem um 0,5 Kelvin höheren Randmaximum am Ende der Trendreihe. Während der 30 Jahre von 1931-60 herrschte in NW-Deutschland eine mittlere Lufttemperatur von  $9,1^\circ\text{C}$ . Bis zum Ende der sechziger Jahre war es hier deutlich kälter, danach (mit einer Ausnahme zu Anfang der achtziger Jahre) deutlich wärmer. Der Trend ist seit 1984 monoton steigend, auffallend stark. In der Zeit von 1961 bis 1988 schwanken die Trendwerte zwischen  $8,7$  und  $9,4^\circ\text{C}$ . Fassen wir dies als "normale" Temperaturschwankungsbreite auf, dann bedeuten die viel höheren Werte am 1989 eine bemerkenswerte Erwärmung, die aus dem Rahmen fällt. Ist es der Anfang oder der Vorbote einer Klimaänderung? Es spricht einiges dafür!

Ganz überraschend fanden wir für die letzten dreißig Jahre eine achtjährige den Trend überlagernde Temperaturschwingung. Die trend- und zyklusbereinigte Reihe (die Restkomponente) zeigt nur noch eine lineare Abweichung  $0,37$  K pro Jahr. Die Zerlegung in drei Komponenten führt also zu einer noch besseren Annäherung des Modells an die Wirklichkeit. Die zyklische Komponente zeigt, daß häufig nach zwei zu kalten Jahren zwei normale Jahre, danach zwei zu warme und danach wieder zwei normale Jahre auftreten. Auch dies ist ein interessantes Ergebnis.

## Ende von Teil 1, Teil 2 folgt im nächsten Heft

- KIMBER, A.: Was für eine Bullenhitze! Analyse einiger Temperaturdatensätze. - Stochastik in der Schule 12(1992), Heft 1, S. 9-17
- KIMBER, A.: Die Arbeitslosenzahlen in Großbritannien. - Stochastik in der Schule 13(1993), Heft 1, S. 41-48
- PFANZAGL, J.: Allgemeine Methodenlehre der Statistik. - Walter de Gruyter Berlin, New York, 6. Aufl. 1983 (Götschen-Band 2046)
- SCHLITGEN, R., STREITBERG, H. J.: Zeitreihenanalyse. - München, Wien: Oldenbourg Verlag, 2. Aufl. 1987
- SCHÖNWIESE, C.D.: Praktische Statistik für Meteorologen und Geowissenschaftler. - Berlin, Stuttgart: Gebrüder Borntraeger, 2. Aufl. 1992
- TROPARTZ, A.: Statistik I: Theorie und Aufgaben. - Schriftenreihe Wissenschaft, Aachen: Verlag Shaker 1989