Erfahrungen mit einer Leistungskurs-Abituraufgabe

Karl-Heinz Krautkrämer

Unterrichtliche Voraussetzungen

Stochastik war das Thema des ersten Halbjahres der Oberprima. In den beiden ersten Wochen wurden noch einige Aspekte zur Linearen Algebra behandelt. Es wurde das Lehrbuch /Althoff 1985/ bis zum Hypothesentest durchgearbeitet. Bei der Bearbeitung der Aufgaben durften ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner und die Formelsammlung aus /Althoff 1985/ benutzt werden.

Alle in der Aufgabe angesprochenen Teilaspekte sind im Unterricht behandelt worden; allerdings ist eine Abfolge wie die vorliegende, die von einem Zeitungsartikel ausgeht, ungewohnt. Anwendungen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit wie auch des Satzes von Bayes wurden an etlichen Beispielen eingeübt; seltener waren Fragen wie in c)1 Unterrichtsgegenstand. Das Testen von Hypothesen und damit verbundene Begriffe wie Nullhypothese, Signifikanzniveau, usw. müssen geläufig sein.

Aufgabenstellung

Die folgende Aufgabe wurde zusammen mit je einer Aufgabe aus der Analysis und der Linearen Algebra (Populationsdynamik) in der Abiturklausur 1994 in meinem Leistungskurs am Kreisgymnasium Halle gestellt. Die Bearbeitungszeit betrug fünf Zeitstunden.

In dem Ihnen bekannten Berufswahl-Magazin „abi" wurde in der Ausgabe 12/92 über die Verkehrsmittelnutzung der Studenten auf ihrem Weg zur jeweiligen Universität berichtet, und zwar wurde unterschieden nach Studenten, die eine Hochschule in den neuen Bundesländern besuchen, und denen, die an einer Hochschule in den alten Bundesländern studieren. Die Angaben lassen sich zu einer (leicht ergänzten) Tabelle zusammenfassen, die nach „Osten", „Westen", „insgesamt" und benutztem Verkehrsmittel eingeteilt wurde, und jeweils Prozentangaben enthält.

	zu Fuß	mit dem Rad	mit einem Bus o.ä.	mit dem Auto
Westen		33,00		37,00
Osten	40,00	15,00	37,00	08,00
insgesamt	12,28		21,29	

a) Berechnen Sie (mit kurzen Erläuterungen) die in der Tabelle fehlenden Prozentangaben, und setzen Sie dabei voraus, daß 92,4% von allen bundesdeutschen Studenten im Westen studieren, der Rest im Osten! (Diese Angabe stammt aus einem anderen Artikel desselben „abi“-Heftes.)

b) Sie treffen im Urlaub einen Studenten aus Deutschland, der Ihnen erzählt, daß er täglich mit dem Rad zur Universität fährt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er an einer Hochschule im Ostteil der BRD eingeschrieben ist?

c) Es sollen nun nur die Studenten aus den neuen (östlichen) Bundesländern betrachtet werden.
   1. Mehrere Studenten werden nacheinander gefragt, ob sie mit dem Fahrrad zur Universität fahren. Die Umfrage soll beendet werden, wenn man den ersten Radfahrer gefunden hat, spätestens aber nach 6 befragten Studenten.
      a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum zum obigen Versuch!
      b) Wie sieht der entsprechende Stichprobenraum aus?
      c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Umfrage vorzeitig abgebrochen wird?
   2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 7 zufällig herausgegriffenen Studenten genau 2 mit dem Fahrrad kommen?
   3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 200 befragten Ost-Studenten mindestens 30 und höchstens 40 mit dem Fahrrad kommen?

d) Der Bielefelder Stadtrat überlegt, ob er ein besonders günstiges „Semester-Ticket“ für die Benutzung von öffentlichen Verkehrsmitteln (Bus) einführen soll, damit Studenten auf ihr eigenes Auto als Verkehrsmittel innerhalb der Stadt verzichten. Da eine solche Einführung nicht billig für die Stadt ist, entschieden sich die Stadtväter, dieses Ticket nur dann einzuführen, wenn der Anteil der autofahrenden Studenten auf unter 25% absinkt. Dazu planen sie einen Test mit einem Stichprobenumfang von 50 zufällig ausgewählten Studenten, die jeweils gefragt werden sollen, ob sie auf ihr Auto verzichten würden, vorausgesetzt es gäbe ein solches Semester-Ticket.
   1. Erläutern Sie die beiden möglichen Fehlerarten, die bei einem solchen Test auftreten können!

   2. Ein bestimmter Ratsherr möchte als Nullhypothese „$H_0: p \geq 0{,}25$“ durchbringen. Welchen Fehler will dieser Mann möglichst gering halten?
   3. Es wird aber als Nullhypothese „$H_0: p < 0{,}25$“ gewählt.
      a) Welchen Fehler möchte die Mehrheit des Stadtrates möglichst vermeiden?
      b) Geben Sie eine geeignete Entscheidungsregel an (Signifikanzniveau von 5%)!
      c) Zeichnen Sie die entsprechende Gütefunktion, kennzeichnen Sie die Bereiche für den Fehler 1. Art, bzw. den 2. Art!
      d) Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit für $p = 0{,}35$?

Erwartete Schülerleistungen

Die Aufgabe ist in ihren wesentlichen Teilen in den 2. Anforderungsbereich einzuordnen. Es gilt zusätzlich immer, einen gedanklich korrekten Ansatz zu finden, der dann formal exakt ausgeführt werden muß (in a) und b)). Die Abfolge in c) verlangt etwas Überblick über den Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der im Unterricht behandelt worden ist (Baum, Stichprobenraum, Berechnungen anhand eines Baumes, Bestimmung über die Definition von binomialverteilten Zufallsgrößen und schließlich noch das Ablesen aus der entsprechenden Tabelle); der Schüler muß also in der Lage sein, die Vorgehensweisen aus dem Unterricht vollständig zu reorganisieren. Obwohl Hypothesentests hinreichend behandelt worden sind, stellen sie an die Schüler wegen der notwendigen Formulierungen und Interpretationen immer erhöhte Anforderungen, so daß hier insgesamt der gehobene Bereich II angesprochen wird.

<u>Lösung der Aufgabe:</u>

Es gelten folgende Festlegungen:

F: Der Student kommt zu Fuß zur Universität.
(Entsprechend: R - Fahrrad; B - Bus; A - Auto)

O: Der Student studiert an einer Hochschule in den neuen Bundesländern.
(Entsprechend: W - alte Bundesländer)

a) $P(F) = P(O) \cdot P_O(F) + P(W) \cdot P_w(F) \quad \Rightarrow 0{,}1228 = 0{,}076 \cdot 0{,}4 + 0{,}924 \cdot P_w(F)$

$\Leftrightarrow P_w(F) = \underline{0{,}1}$

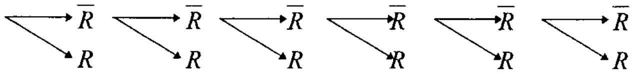
$P_w(B) = 1 - (P_w(F) + P_w(R) + P_w(A)) = 0{,}2$

$$P(R) = P(O) \cdot P_O(R) + P(W) \cdot P_w(R) = 0{,}076 \cdot 0{,}15 + 0{,}924 \cdot 0{,}33 = \underline{0{,}3163}$$
$$P(A) = 1 - (P(R) + P(B) + P(F)) = \underline{0{,}3480}$$

b) Diese Aufgabe wird mit Hilfe des Satzes von Bayes gelöst.

$$P_R(O) = \frac{P(O) \cdot P_O(R)}{P(R)} = \frac{0{,}076 \cdot 0{,}15}{0{,}3136} = \underline{0{,}036}$$

Mit ca. 3,6% Wahrscheinlichkeit studiert er in den neuen Bundesländern.

c) 1. a) 

b) $S = \{R, \overline{R}R, \overline{RR}R, \overline{RRR}R, \overline{RRRR}R, \overline{RRRRR}R, \overline{RRRRRR}\}$

c) P(„vorzeitiger Abbruch")
= 1 – P(„Es werden 6 Studenten befragt.")
= $1 - 0{,}85^6 = \underline{0{,}5563}$
Mit ca. 55,6% wird vorzeitig abgebrochen.

2. $P(2R5) = \binom{7}{2} 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^5 = \underline{0{,}2097}$

3. X gibt die Anzahl der Studenten in den neuen Bundesländern an, die mit dem Fahrrad zur Universität fahren. Es handelt sich um eine kleine Stichprobe aus einer großen Population, also ist X (näherungsweise) binomialverteilt mit den Parametern $n = 200$ und $p = 0{,}15$.

$$P(30 \leq X \leq 40) = B(200;0{,}15;40) - B(200;0{,}15;29) = \underline{0{,}508}$$

d) X gebe nun die Anzahl der autofahrenden Studenten an; X ist binomialverteilt, da sich die Studenten unabhängig voneinander für das Auto entscheiden.

1. Fehler 1: Der Stadtrat entscheidet sich aufgrund des Tests für das Ticket, obwohl in Wirklichkeit immer noch mindestens 25% mit dem Auto zur Uni fahren.

Fehler 2: Man entscheidet sich gegen das Ticket, obwohl bei einer Einführung weniger als 25% mit dem Auto zur Uni kämen.

2. Für den Ratsherrn ist der Fehler 1 der schlimmere, da man zum einen nicht das Ziel „weniger als 25%" erreicht hat und zum anderen noch zusätzlich Geld verliert, weil ja die Studenten, die schon immer mit öffentlichen Verkehrsmitteln kamen, nun auch weniger bezahlen müssen.

3. a) Es soll möglichst vermieden werden, daß man aufgrund des Tests das Ticket nicht einführt, obwohl in Wirklichkeit dann weniger als 25% mit dem Auto zur Uni kämen.

b) Entscheidungsregel: V*erwirf* $H_0 \Leftrightarrow X > a$

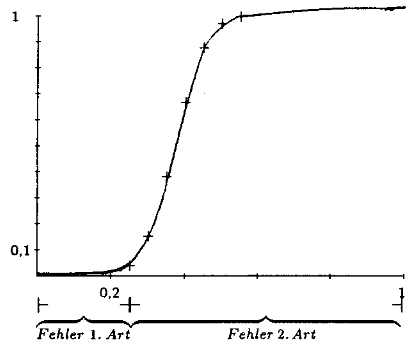
$\alpha_{max} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a \geq 18$

Entscheidungsregel: V*erwirf* $H_0 \Leftrightarrow X > 18$

Es wurde 18 gewählt, da in diesem Fall der Fehler 1. Art unter 5% ist und der Fehler 2. Art möglichst gering ist.

c) Für die Gleichung der Gütefunktion g erhält man:

$$g(p) = 1 - B(50;p;18) = \begin{cases} 1 - B(50;p;18) & \text{für } p < 0{,}25 \\ B(50;p;18) - 1 & \text{für } p \geq 0{,}25 \end{cases}$$



d) $\beta(0{,}35) = \underline{0{,}622}$

Zu den erreichten Ergebnissen

Im folgenden ist die jeweils zu erreichende Punktzahl in der zweiten Zeile aufgeführt und in der dritten die im Durchschnitt erreichte Prüfungsleistung (in %).

a)	b)	c)			d)		
		1.	2.	3.	1.	2.	3.
6	4	3/2/2	3	3	5	3	2/5/5/1
96,8	83,3	86,1	80,6	71,3	85,0	83,0	68,2

Von den möglichen Punkten erreichten die Schüler im Durchschnitt also 76,6%. Bei den beiden anderen Aufgaben - alle waren etwa gleichgewichtet - betrug dieser Anteil nur 67,2% (Lineare Algebra), bzw. 59,1% (Analysis). Dieser Abfall lag hauptsächlich an den Schwierigkeiten, Regeln algebraisch sicher anzuwenden. Die folgende Tabelle verdeutlicht den Unterschied in der Benotung der Bearbeitung durch die Schüler; es ist eine Übersicht über die Noten, die die Prüflinge in den drei Aufgaben erhalten hätten. Die letzte Zeile gibt das Ergebnis der Prüfungsleistung insgesamt an.

	1			2			3			4			5			6
	+	o	-	+	o	-	+	o	-	+	o	-	+	o	-	
Lineare Algebra	1	1		2	1	3	5						1	1	2	1
Stochastik	2	3	5	2		3		1		1						1
Analysis			1	1	1	2	2	1	4	1	1	2	1		1	
insgesamt		1	1	2	1	3	3	1	1	2	2			1		

Etwas überraschend ist der deutlich bessere Ausfall in der Aufgabe zur Stochastik; denn in den vorangegangenen Klausuren waren die dort gezeigten Leistungen eher schwächer als die innerhalb der Analysis und der Linearen Algebra. Diese Leistungssteigerung mag zum einem daran liegen, daß die Stochastik zum Schluß behandelt wurde, also den Prüflingen im Abitur gegenwärtiger war; zum anderen haben die Schüler - nach eigener Aussage - aufgrund vorheriger Zensuren sich bei der Vorbereitung mehr auf die Stochastik konzentriert.
Gegenüber den anderen Oberstufenklausuren zeigte sich im Verhalten der Schüler während der Klausur und bei vorzeitiger Abgabe kein anderes Verhalten, die Benotung war im Durchschnitt etwa um einen Punkt besser.

Literatur:

Althoff, Heinz: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastik, Verlag Metzler, Stuttgart 1985.

Karl-Heinz Krautkrämer
Humpenweg 15
33790 Halle