Überraschendes bei Münzwurfserien

Hans Humenberger, Wien

Zusammenfassung: Wir wollen ein Phänomen („Paradoxon") näher beleuchten, das sich auf Serien von Münzwürfen wie z.B. *KAKKAKAAAK*...... bezieht (*K* steht für „Kopf" und *A* für „Adler"). Stellt man nämlich ganz unvoreingenommen die Frage, welches der Muster *KAKA* oder *AKAA* das „wahrscheinlichere" sei (zunächst ohne Präzisierung, was „wahrscheinlich" jeweils bedeuten soll), so kann man – je nach Sichtweise (Präzisierung von „wahrscheinlich") – zu völlig verschiedenen Ergebnissen gelangen. Wir setzen dabei immer voraus, daß es sich beim Werfen der idealen Münze um einen Bernoulli-Versuch handelt (Unabhängigkeit der Versuchsausgänge, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ergibt sich *K* oder *A*).

Im folgenden wollen wir dieses Phänomen zunächst in einer sehr einfachen Version (zweigliedrige Muster) auf Schulniveau behandeln, und zwar unter Zuhilfenahme *bedingter Erwartungswerte*. Daran anschließend betrachten wir drei- und viergliedrige Muster, wobei dort insbesondere ein „unfaires Spiel" im Zentrum der Betrachtungen steht.

1 Paradoxa in der Stochastik

Insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung begegnen wir immer wieder Situationen, in denen wir mit unserer Intuition zu völlig falschen Ergebnissen kommen, wir schätzen diese Situation falsch ein. Umso größer sind oft die Überraschungen, wenn man erfährt, wie weit der intuitiv geschätzte Wert vom „wirklichen Wert" (wenn es um das Schätzen eines Wertes bzw. Ergebnisses geht) entfernt ist. Man kann darüber diskutieren, ob man solche Situationen alleine deswegen als *paradox* (also eigentlich als „widersinnig") bezeichnen soll, weil sie unserer Intuition nicht entsprechen bzw. (besser:) weil unsere Intuition nicht der jeweiligen Situation entspricht; wir wollen aber bei dieser Bezeichnung bleiben mit dem Hinweis, daß wir damit einfach den *Widerspruch* zu unserer *Intuition* meinen.

Es scheint für uns klar zu sein, daß Überraschungen, Fehlmeinungen etc. (wenn man will: *Paradoxa*) einen hohen *didaktischen Wert* im Mathematikunterricht haben, und zwar in mehrfacher Hinsicht. Einerseits haben Paradoxa einen hohen *Faszinationswert*, der zusammen mit dem *Unterhaltungswert* i.a. zu einer Verbesserung der Motivation führt (bei Schülern, Studenten und Lehrerfortbildungen). Andererseits kommt den Paradoxa aber auch ein hoher *Bildungswert* zu, wenn Zusammenhänge deutlicher werden bzw. Verständnis erzeugt wird. Diese *Werte* werden leider oft nicht anerkannt, nicht beachtet bzw. zumindest unterschätzt, besonders in bezug auf *Motivation* und *Verständnis* – vgl. auch Bentz 1985, Pflug 1981, Stadler 1986 und die anderen Arbeiten im Literaturverzeichnis am Beitragsende zum Thema *Paradoxa in der Stochastik* (nicht nur, aber vorwiegend zu diesem Thema).

2 Bedingte Erwartungswerte

Für die Überlegungen der folgenden Abschnitte sind der Begriff des *bedingten Erwartungswertes* und der *Satz vom totalen Erwartungswert* sehr wichtig. Für genauere Darstellungen diesbezüglich sei auf Kilian 1987 oder Humenberger 1998a verwiesen; an dieser Stelle seien nur die Definition, ein Satz und eine besonders interessante Anwendung bedingter Erwartungswerte, auf die wir noch mehrfach zurückkommen werden, angegeben.

Definition: Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ...\}$ als mögliche Werte und A ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Der *bedingte Erwartungswert* bezüglich der Bedingung A wird dann definiert durch

$$\boxed{E(X \mid A) \overset{\text{def}}{=} \sum_k x_k P(X = x_k \mid A)}\,, \tag{1}$$

falls die (möglicherweise unendliche) Reihe absolut konvergiert. In der Definition sind also die Wahrscheinlichkeiten (im Vergleich zum gewöhnlichen Erwartungswert) durch bedingte Wahrscheinlichkeiten zu ersetzen. Es gilt in Analogie zum *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit* auch der *Satz vom totalen Erwartungswert.*

Satz vom totalen Erwartungswert: Ist X eine diskrete Zufallsvariable und A_n (n = 1, 2,...) eine *vollständige Zerlegung des Ereignisraumes* Ω [auch *vollständiges Ereignissystem* oder *vollständige Ereignisdisjunktion* genannt d.h. ein Ereignissystem mit $\bigcup_n A_n = \Omega$, $A_n \neq \varnothing$ und $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$],

so gilt

$$\boxed{E(X) = \sum_n E(X \mid A_n) P(A_n).} \tag{2}$$

Der Beweis kann leicht mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit geführt werden (siehe z.B. Humenberger 1998a).

Anwendung: Besonders einfache Begründung für den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable: $E(X) = 1/p$

Die Zufallsvariable X sei geometrisch verteilt mit dem Parameter p, d.h. X sei die Anzahl der notwendigen Versuchswiederholungen eines Zufallsexperiments bis zum *ersten* Eintreten eines bestimmten Ereignisses A, das bei jeder Versuchswiederholung mit konstanter Wahrscheinlichkeit p eintritt (Unabhängigkeit der einzelnen Versuche sei vorausgesetzt – „Bernoulli-Experiment"). Die beiden einfachsten und am öftesten genannten Beispiele dazu sind wohl: „Werfen einer Münze, bis zum ersten Mal *Kopf* fällt" oder „Würfeln, bis zum ersten Mal eine *Sechs* fällt". Dann gilt (für eine detaillierte Begründung mittels bedingter Erwartungswerte und des Satzes vom totalen Erwartungswert vgl. z.B. Humenberger 1998a):

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}.} \tag{3}$$

Im Durchschnitt (auf lange Sicht) muß man demnach zweimal eine Münze werfen, um zum ersten Mal *Kopf*, bzw. sechsmal einen Würfel, um erstmalig eine *Sechs* zu erhalten.

3 Die Muster „*KA*" und „*KK*" in Münzwurfserien – eine Anwendung bedingter Erwartungswerte

Verschiedene Sichtweisen zur Beurteilung der „Wahrscheinlichkeit von Mustern":

1. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit, daß beim *zweimaligen* Münzwurf das Ergebnis *KA* bzw. *KK* erscheint, so ergibt sich jeweils $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – die genannten Muster *KA* und *KK* sind unter diesem Aspekt also *gleichwahrscheinlich.* Dies würde klarerweise auch für alle anderen zweigliedrigen Muster gelten (*AK*, *AA*). Auch drei- und mehrgliedrige Muster (n Stellen) haben beim n-maligen Werfen einer Münze jeweils gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit, nämlich $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2. Eine weitere mögliche *Sichtweise* zur Einschätzung bzw. Quantifizierung einer möglichen *Bevorzugung* eines n-gliedrigen Musters X_n gegenüber einem anderen Muster Y_n: Man könnte die durchschnittlich nötige Anzahl von Würfen betrachten (Erwartungswerte), um erstmalig X_n bzw. Y_n zu erhalten. Für diese Erwartungswerte ergeben sich i.a. verschiedene Zahlen. Wenn der Erwartungswert der nötigen Würfe, bis das Muster X_n erstmalig auftritt, *kleiner* als bei einem Muster Y_n ist, so wird *in dieser Sichtweise X_n als bevorzugt bzw. wahrscheinlicher* zu bezeichnen sein.

   Konkret: Für *KA* sind im Durchschnitt 4 Würfe nötig, für *KK* hingegen durchschnittlich 6 (siehe unten). Unter *diesem Aspekt* ist *KA* doch als „*wahrscheinlicher*" zu bezeichnen als *KK* (aber „Gleichwahrscheinlichkeit" unter den anderen beiden Aspekten). Bei viergliedrigen Mustern erhält man z.B., daß für *KAKA* durchschnittlich 20 Würfe benötigt werden, für *AKAA* hingegen nur 18 (vgl. Szekely 1990, S. 61ff). *So gesehen* ist *AKAA* gegenüber *KAKA* doch als „wahrscheinlicher" (bzw. als bevorzugt) zu bezeichnen.
3. Zieht man jedoch zur Einschätzung (Quantifizierung) einer möglichen Bevorzugung heran, ob es wahrscheinlicher ist, daß in einer Wurfserie *KA vor KK* kommt oder umgekehrt – gemeint ist hier nicht „unmittelbar davor", sondern „*früher als*" –, so ergibt sich ebenfalls *Gleichwahrscheinlichkeit*, denn nach dem ersten auftretenden K kommt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder A oder K.

   Im allgemeinen muß sich bei der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten n-gliedrigen Musters X_n *vor* einem anderen n-gliedrigen Y_n (im Sinne von „früher als") jedoch keineswegs $\frac{1}{2}$ ergeben. So erhält man z.B. für die Wahrscheinlichkeit, daß das Muster *AKK* vor *KKA* erscheint, den Wert $\frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$ (so gesehen ist also *AKK* viel wahrscheinlicher als *KKA*). Für viergliedrige Muster ergibt sich z.B.: Die Wahrscheinlichkeit, daß *KAKA* vor *AKAA* eintritt, beträgt $\frac{9}{14}$ (*so gesehen* ist *KAKA* deutlich „wahrscheinlicher" als *AKAA* – im Gegensatz zu oben, wo *AKAA* „wahrscheinlicher" war!). Schon bei zweigliedrigen Mustern treten Beispiele dieser Art auf – siehe unten.

3.1 Vergleich von zweigliedrigen Mustern in bezug auf die Auftrittswahrscheinlichkeit eines Musters vor einem anderen

Wie bereits erwähnt, muß bei n-gliedrigen Mustern X_n bzw. Y_n i.a. nicht gelten: $P(X_n \text{ vor } Y_n) = P(Y_n \text{ vor } X_n) = \frac{1}{2}$. Wir wollen dies anhand von zweigliedrigen Mustern verdeutlichen. Als mögliche zweigliedrige Muster kommen in Frage: *AA*, *AK*, *KA*, *KK*. Aus diesen vier Mustern können wir sechs Paarungen von Mustern X_2, Y_2 bilden und Überlegungen für die Wahrscheinlichkeiten $P(X_2 \text{ vor } Y_2)$ (oder umgekehrt $P(Y_2 \text{ vor } X_2)$) anstellen. Aus *Symmetriegründen* erhält man in diesem Sinn zwei gleichwahrscheinliche Paarungen (*AA* und *KK*; *AK* und *KA*):

$P(AA \text{ vor } KK) = P(KK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2}$,
$P(AK \text{ vor } KA) = P(KA \text{ vor } AK) = \frac{1}{2}$,

und zwei weitere gleichwahrscheinliche Paarungen bei jeweils gleichem „Anfang" (*AA* und *AK*, *KK* und *KA*; nach dem erstmaligen Auftreten des jeweils gleichen Anfangs kommt ja mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder *A* oder *K*):

$P(AA \text{ vor } AK) = P(AK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2}$,
$P(KK \text{ vor } KA) = P(KA \text{ vor } KK) = \frac{1}{2}$.

Bei den noch fehlenden Paarungen mit jeweils gleichem „Schluß" (*AA* und *KA*, *AK* und *KK*) kommen wir jedoch zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten. Betrachten wir z.B. die Wahrscheinlichkeit, daß $\boxed{KK \text{ vor } AK}$ kommt:

Sehr einfach scheint uns z.B. folgende Überlegung (Begründung) für die Wahrscheinlichkeit $P(KK \text{ vor } AK)$ zu sein: die ersten beiden Würfe einer Serie können *KK*, *AK*, *KA*, *AA* sein (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$). Im ersten Fall (*KK*) ist klarerweise „*KK* vor *AK*" eingetreten. Im zweiten trivialerweise umgekehrt; aber auch nach *KA* bzw. *AA* kann niemals „*KK* vor *AK*" eintreten, denn sobald nach *KA* bzw. *AA* ein *K* folgt (u.U. nach einigen *A*'s), ist in diesen Fällen „*AK* vor *KK*" eingetreten.

Einschub: *Keines* der beiden Muster *KK* bzw. *AK* würde nach einem Beginn der Form *KA* bzw. *AA* nur dann eintreten, wenn nach dem *A* an der zweiten Stelle nur mehr *A*'s kämen – ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 („irgendwann" kommt also mit Wahrscheinlichkeit 1 ein *K* in einer beliebig langen Serie). Man kann sogar relativ leicht zeigen, daß *jedes endliche Muster* mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann in einer unendlichen langen Serie erscheinen wird!

In drei von vier möglichen Anfangskonstellationen tritt also mit Wahrscheinlichkeit 1 „*AK* vor *KK*" ein, in einer „*KK* vor *AK*". Analoge Überlegungen können wir auch mit *AA* und *KA* anstellen und erhalten insgesamt:

$P(KK \text{ vor } AK) = \frac{1}{4}$ und $P(AK \text{ vor } KK) = \frac{3}{4}$,
$P(AA \text{ vor } KA) = \frac{1}{4}$ und $P(KA \text{ vor } AA) = \frac{3}{4}$.

So gesehen ist also *AK* „deutlich wahrscheinlicher" als *KK*, und *KA* ist „deutlich wahrscheinlicher" als *AA*.

In diesem Lichte eröffnet sich die Möglichkeit eines *unfairen* Spiels, das im ersten Moment vielleicht gar nicht so aussieht. Die volle Tücke dieses Spiels kommt allerdings erst bei drei- und mehrgliedrigen Mustern zum Tragen. Zwei Spieler (S_1 und S_2) vereinbaren folgendes (aus der Sicht von S_1 vielleicht verlockendes, da in einem gewissen Sinn *großzügiges*) Spiel: S_1 kann sich ein beliebiges zweigliedriges Muster (*AA*, *AK*, *KA*, *KK*) aussuchen (S_1 hat also die erste Wahl, großzügiges Angebot von S_2?) und S_2 wählt daraufhin seinerseits ein Muster aus den drei verbleibenden. Eine faire Münze soll nun geworfen werden und gewonnen hat jener Spieler, dessen Muster zuerst (als Ergebnis zweier aufeinanderfolgender Würfe) erscheint. Zu jeder Wahl von S_1 kann S_2 ein Muster wählen, mit dem er zumindest nicht schlechter dran ist (in zwei Fällen gleich gut und in zwei Fällen wesentlich besser): Wenn S_1 das Muster *AK* oder *KA* wählt, so hat S_2 jeweils zwei Möglichkeiten, ein wenigstens gleich gutes zu wählen (*AA* oder *KA*; *KK* oder *AK*); wenn jedoch Spieler S_1 das Muster *AA* bzw. *KA* wählt, so kann S_2 mit der Wahl von *KA* bzw. *AK* richtiggehend kontern und sich eine Gewinnwahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{3}{4}$ sichern! In Tabelle 1 ist dies (einschließlich der jeweils zugehörigen Erwartungswerte – siehe folgenden Abschnitt) übersichtlich dargestellt.

Bei dreigliedrigen Mustern gibt es zu jeder Wahl von S_1 eine Wahl von S_2, mit der er mit einer Wahrscheinlichkeit von zumindest $\frac{2}{3}$ gewinnt – siehe Abschnitt 4.1.

3.2 Erwartungswerte für die Anzahl nötiger Würfe, bis erstmalig ein bestimmtes zweigliedriges Muster auftritt

Wir geben zwei kurze Möglichkeiten an zu begründen, daß der Erwartungswert für die nötige Anzahl von Münzwürfen für *KA* den Wert 4 und für *KK* den Wert 6 hat (im Sinne der Erwartungswerte ist also *KA* deutlich „wahrscheinlicher" als *KK*). Diese Erwartungswerte seien im folgenden mit $E(KA)$ bzw. $E(KK)$ bezeichnet. Aus Symmetriegründen gilt natürlich $E(KA) = E(AK)$ und $E(KK) = E(AA)$.

1. Für *KA* hilft uns eine ganz simple Überlegung. Das Ereignis „zum ersten Mal *KA*" tritt genau dann ein, wenn nach dem ersten auftretenden *K* erstmalig ein *A* folgt. Ein solches Muster könnte durch folgende Darstellung angedeutet werden: ...*K*] ...*KA*]. Vor dem ersten *K* können noch einige *A*'s auftreten und danach noch einige weitere *K*'s. Jedenfalls bedeutet „Warten auf *KA*" nichts anderes als „Warten auf das erste *K* und dann Warten auf das erste *A*". Da für beide bei jedem Versuch die Auftrittswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ beträgt, ergibt sich für die entsprechenden *Teilwartezeiten* (gemeint ist die Anzahl der nötigen Versuche) jeweils $\frac{1}{p} = 2$ (siehe oben (3): Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable – mit Hilfe von bedingten Erwartungswerten einfach berechenbar, vgl. auch Humenberger 1998a). Da die Gesamtwartezeit auf *KA* (Zufallsvari-

able Z) offenbar die Summe der beiden Teilwartezeiten auf K (Zufallsvariable X) bzw. auf A (Zufallsvariable Y) ist – also $Z = X + Y$ –, und allgemein für Zufallsvariablen $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ gilt, so erhalten wir für den interessierenden Erwartungswert $E(KA) = E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 2 = 4$.

2. Nun wollen wir $E(KK) = 6$ zeigen. Wir wollen mit Hilfe des Satzes vom totalen Erwartungswert zum Ziel kommen und brauchen dafür eine Ereignisdisjunktion, die sich in natürlicher Weise nach dem Ergebnis des ersten Wurfes ergibt, dieses kann K oder A sein. Sei $E_K \overset{\text{def}}{=} E(KK|K)$ der Erwartungswert der nötigen Wurfanzahl für KK unter der Bedingung, daß der erste Wurf K ergab; analog sei $E_A \overset{\text{def}}{=} E(KK|A)$ definiert. Wenn wir über diese bedingten Erwartungswerte später verfügen werden, so können wir leicht mit Hilfe des Satzes vom totalen Erwartungswert zu einem Ergebnis kommen: $E = E(KK) = E_A \cdot \frac{1}{2} + E_K \cdot \frac{1}{2}$.

   Zwischen den in Rede stehenden bedingten Erwartungswerten E_K und E_A können wir (wiederum mit Hilfe des Satzes vom totalen Erwartungswert) folgende Beziehungen anschreiben (Erläuterungen unten):

$$E_K = 1 + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + E_A \cdot \tfrac{1}{2} \quad \text{und}$$
$$E_A = 1 + \underbrace{E_K \cdot \tfrac{1}{2} + E_A \cdot \tfrac{1}{2}}_{E(KK)} \tag{4}$$

   Erklärungen:

   - E_K: Der erste Wurf fällt auf K („1 + ...“), dann kommt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder wieder ein K („... + $1 \cdot \frac{1}{2}$“) oder ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein A, was so viel wie einen „neuen ersten Wurf A“ bedeutet („... + $E_A \cdot \frac{1}{2}$“).
   - E_A: Der erste Wurf fällt auf A („1 + ...“) und das Spiel kann sozusagen wieder von neuem beginnen: mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ fällt beim 2. Mal entweder ein K („... + $E_K \cdot \frac{1}{2}$“, neuer „Anfangswurf K“) oder wieder ein A („Anfangswurf A“: „... + $E_A \cdot \frac{1}{2}$).

   Die Gleichungen (4) können auch in einer etwas anderen Struktur geschrieben werden, in der vielleicht der Satz vom totalen Erwartungswert etwas deutlicher sichtbar ist (wir werden im folgenden jedoch bei der obigen Schreibweise bleiben):

$$E_K = (1 + 1) \cdot \tfrac{1}{2} + (1 + E_A) \cdot \tfrac{1}{2} \quad \text{und}$$
$$E_A = (1 + E_K) \cdot \tfrac{1}{2} + (1 + E_A) \cdot \tfrac{1}{2}.$$

   Aus den Gleichungen (4) erhalten wir sofort $E_A = 7$ und $E_K = 5$ und mit diesen bedingten Erwartungswerten schließlich

$$E(KK) = E_A \cdot \tfrac{1}{2} + E_K \cdot \tfrac{1}{2} = 6. \tag{5}$$

Die Erwartungswerte der nötigen Würfe für das *bestimmte* „Doppelmuster“ KK bzw. für das *bestimmte* „Abwechslungsmuster“ KA sind also deutlich verschieden. Dadurch könnte man sich zur Vermutung hinreißen lassen, daß auch bei den zugehörigen Erwartungswerten für *ein beliebiges Doppelmuster* (also „KK oder AA“) bzw. *für eine beliebige Abwechslung* (also „AK oder KA“) ein Unterschied bestehe. Es ist jedoch leicht zu sehen [besonders bei $E(AK$ oder $KA)$], daß sich hier jeweils 3 ergibt.

- $E(AK,KA) \overset{\text{def}}{=} E(AK$ oder $KA) = 1 + 2 = 3$: Warten auf eine Abwechslung bedeutet ja nichts anderes, als die Münze einmal zu werfen („1 +...“) und dann auf das jeweilige *andere* Ergebnis zu warten („... + 2“, geometrische Verteilung – siehe (3)).
- $E(KK,AA) \overset{\text{def}}{=} E(KK$ oder $AA) = 3$: Hier kann man nun wieder mit bedingten Erwartungswerten und zweifache Anwendung des Satzes vom totalen Erwartungswert kurz und erfolgreich argumentieren. Wir generieren ganz analog zu oben die dazu nötige Ereignisdisjunktion nach dem Ergebnis des ersten Wurfes. Sei also $E_K \overset{\text{def}}{=} E(KK,AA|K)$ der Erwartungswert für ein *beliebiges Doppelmuster* unter der Bedingung, daß beim ersten Wurf K gefallen ist; analog sei $E_A \overset{\text{def}}{=} E(KK,AA|A)$ definiert. Es ist zunächst völlig klar (aus Symmetriegründen), daß $E_K = E_A$ sein muß und wegen $E(KK,AA) = \frac{1}{2}E_K + \frac{1}{2}E_A$ gilt daher $E(KK,AA) = E_K = E_A$. Mit den eben eingeführten Bezeichnungen (bedingten Erwartungswerten) ergibt sich (analoge „Erklärungen“ zu oben)

$$E_K = 1 + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + E_A \cdot \tfrac{1}{2} \quad \text{und}$$
$$E_A = 1 + E_K \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2}, \tag{6}$$

  woraus wir unmittelbar $E_A = E_K = E(KK,AA) = 3$ erhalten.

4 Drei- und viergliedrige Muster

4.1 Muster X vor Muster Y bei dreigliedrigen Mustern – ein unfaires Spiel

Das in Abschnitt 3.1 erwähnte Spiel soll auf das dreigliedrige Analogon ausgebaut werden.

Spiel: Julia und Julian werfen eine faire Münze. Bevor sie beginnen, sucht sich jeder von ihnen ein dreigliedriges Muster aus (8 Möglichkeiten). Gewinner ist derjenige, dessen Muster als erstes (als aufeinanderfolgende Wurfergebnisse) erscheint. Julian läßt der Höflichkeit halber („Ladies first") seiner Gegnerin Julia die erste Wahl. Dies bedeutet auf den ersten Blick für Julia einen Vorteil, denn Julian kann dann sein Muster nur aus den restlichen sieben möglichen wählen. Soll Julia dieses „gutgemeinte" Angebot annehmen?

Antwort: Es stellt sich heraus, daß die erste Wahl hier ein eminenter Nachteil wäre, denn Julian könnte nach jeder Wahl von Julia ein Muster auswählen, mit dem er zumindest die doppelte Gewinnchance von Julia hätte.

	KK 6	*KA* 4	*AK* 4	*AA* 6
KK (6)	–	$\boxed{½}$	¼	½
KA (4)	*½*	–	$\boxed{½}$	$\boxed{¾}$
AK (4)	$\boxed{¾}$	$\boxed{½}$	–	*½*
AA (6)	½	¼	$\boxed{½}$	–

Tab. 1: 2-gliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als" in einer Wurfserie mit einer Laplace-Münze.

$\boxed{¾}$ ... eingerahmt sind die jeweiligen Spaltenmaxima (wichtig für den Spieler S_2 bei obigem „unfairen Spiel"; siehe auch Spiel „Julia–Julian" im Abschnitt 4.1). *½ ... kursiv sind jene Werte ½ gesetzt, bei denen gilt: unterschiedliche Erwartungswerte, aber gleiche Wahrscheinlichkeiten (eben ½) bei „kommt früher als".*

Wir machen dies an einem Beispiel klar. Wenn Julia sich für das Muster *KAK* entschiede, so könnte Julian das Muster *KKA* wählen und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gewinnen, also $P = P(KKA \text{ vor } KAK) = \frac{2}{3}$. Mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten und des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit ist dies leicht einzusehen: Wir nehmen die dafür nötige Ereignisdisjunktion nach den vier möglichen „Anfangspaaren" vor und bezeichnen mit P_{AA}, P_{AK}, P_{KA}, P_{KK} die bedingten Wahrscheinlichkeiten, daß Julian gewinnt (also das Ereignis $\boxed{KKA \text{ vor } KAK}$ eintritt) unter der Voraussetzung, daß die ersten beiden Würfe das Ergebnis *AA*, *AK*, *KA*, *KK* hatten. Je zwei dieser Startmuster sind klarerweise gleichwahrscheinlich, so daß jedem von ihnen eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ zukommt. Für die genannten bedingten Wahrscheinlichkeiten erhalten wir aufgrund des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit (Erklärung unten):

$$P_{AA} = \tfrac{1}{2}P_{AA} + \tfrac{1}{2}P_{AK}$$
$$P_{AK} = \tfrac{1}{2}P_{KA} + \tfrac{1}{2}P_{KK}$$
$$P_{KA} = \tfrac{1}{2}P_{AA} + \tfrac{1}{2}\cdot 0$$
$$P_{KK} = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}P_{KK}.$$

Die erste Gleichung besagt z.B., daß nach dem Startmuster *AA* mit gleicher Wahrscheinlichkeit (jeweils $\frac{1}{2}$) ein *A* oder ein *K* fällt: Fällt ein *A* an der dritten Stelle, so liegt erneut das Startmuster *AA* (an zweiter und dritter Stelle) vor; fällt ein *K*, so liegt *AK* als neues Startmuster vor. Ganz analog ist die zweite Gleichung zu interpretieren. Dritte Gleichung: Wenn nach *KA* ein *A* fällt, so liegt *AA* als neues Anfangsmuster vor, wenn *K* fällt, so ist das Muster *KAK* erschienen und $P(KKA \text{ vor } KAK) = 0$! Vierte Gleichung analog. Dieses lineare Gleichungssystem in vier Unbekannten hat die Lösung

$$P_{AA} = \tfrac{2}{3},\ P_{AK} = \tfrac{2}{3},\ P_{KA} = \tfrac{1}{3},\ P_{KK} = 1.$$

[Die Tatsache $P_{KK} = 1$ ist auch von vornherein klar: Wenn *KK* das Ergebnis der ersten beiden Würfe ist, so wäre das Muster *KKA* (und damit „*KKA* vor *KAK*") nur dadurch zu verhindern, daß *niemals A* fallen würde – ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0.] Mit diesen Werten erhalten wir für die Gewinnwahrscheinlichkeit *P* für Julian („*KKA* vor *KAK*") durch abermaliges Anwenden des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P = \tfrac{1}{4}(P_{AA} + P_{AK} + P_{KA} + P_{KK}) = \tfrac{1}{4}(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + 1) = \tfrac{2}{3}.$$

Einschub: Man könnte auch schon bei zweigliedrigen Mustern *formal* mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit arbeiten (*inhaltlich* handelt es sich bei der Begründung für $P(KK \text{ vor } AK) = \frac{1}{4}$ in Abschnitt 3.1 ohnehin auch um bedingte Wahrscheinlichkeiten).

Sei also $P \overset{\text{def}}{=} P(KK \text{ vor } AK)$. Für den ersten Münzwurf gibt es zwei Möglichkeiten: *A* oder *K*. Mit einer analogen Definition der bedingten Wahrscheinlichkeiten P_A und P_K (je nach dem Ergebnis des ersten Wurfes) und dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit kann man für das Ereignis $\boxed{KK \text{ vor } AK}$ folgende Gleichungen aufstellen

$$P_A = \tfrac{1}{2}P_A + \tfrac{1}{2}\cdot 0 \ \text{ und } \ P_K = \tfrac{1}{2}P_A + \tfrac{1}{2}\cdot 1\,,$$

woraus sich sofort $P_A = 0$ und $P_K = \frac{1}{2}$ und durch abermalige Anwendung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{2}P_A + \frac{1}{2}P_K = \frac{1}{4}$ ergibt.

Die Wahl von Julia war aber ohnehin noch eine ihrer besten, andere hätten sie noch viel weiter in einen Nachteil versetzt. Hätte sie nämlich z.B. *KKK* gewählt, so hätte Julian durch Wählen des Musters *AKK* seine Gewinnwahrscheinlichkeit sogar auf $\frac{7}{8}$ steigern können (er würde immer gewinnen, außer wenn die ersten drei Würfe *KKK* zeigen!).

	KKK (14)	*KKA* (8)	*KAK* (10)	*AKK* (8)	*KAA* (8)	*KAK* (10)	*AAK* (8)	*AAA* (14)
KKK (14)	–	*1/2*	2/5	1/8	2/5	5/12	3/10	1/2
KKA (8)	*1/2*	–	$\boxed{2/3}$	`1/4`	$\boxed{\texttt{2/3}}$	5/8	1/2	7/10
KAK (10)	3/5	1/3	–	*1/2*	*1/2*	1/2	3/8	7/12
AKK (8)	$\boxed{7/8}$	$\boxed{\texttt{3/4}}$	*1/2*	–	1/2	*1/2*	`1/3`	3/5
KAA (8)	3/5	`1/3`	*1/2*	1/2	–	*1/2*	$\boxed{\texttt{3/4}}$	$\boxed{7/8}$
AKA (10)	7/12	3/8	1/2	*1/2*	*1/2*	–	1/3	3/5
AAK (8)	7/10	1/2	5/8	$\boxed{\texttt{2/3}}$	`1/4`	$\boxed{2/3}$	–	*1/2*
AAA (14)	1/2	3/10	5/12	2/5	1/8	2/5	*1/2*	–

Tab. 2: 3-gliedrige Muster: Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als" in einer Wurfserie mit einer Laplace-Münze. Zu den angegebenen Erwartungswerten (14, 8, 10, ..., 14) siehe Abschnitt 4.2.

Legende für Tab. 2 und 4-5 (am Schluß des Beitrages):

- $\boxed{7/8}$ eingerahmt sind die jeweiligen Spaltenmaxima (→ Spiel: Julia – Julian).
- *1/2 kursiv sind jene Werte 1/2 gesetzt, bei denen gilt: unterschiedliche Erwartungswerte, aber gleiche Wahrscheinlichkeiten (eben 1/2) bei „kommt früher als".*
- `1/4 in typewriter sind jene Werte (≠ 1/2) gesetzt, bei denen gilt: gleiche Erwartungswerte, aber unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten bei „kommt früher als" (eben ≠ 1/2)` (kommt bei 2-gliedrigen Mustern nicht vor).

In Tab. 2 sind nun alle Wahrscheinlichkeiten aufgelistet, mit der das jeweilige Zeilen-Muster früher als das jeweilige Spalten-Muster beim Werfen einer fairen Münze kommt. Der höchste Wert jeder Spalte ist eingerahmt: Das in dieser Zeile stehende Muster ist also das beste „Gegenmittel" gegen das in dieser Spalte stehende. M.a.W.: Zu jeder Wahl von Julia (Spaltenwahl) sucht sich Julian in der gewählten Spalte jenes Element (Zeilenwahl), mit dem er die größten Gewinnchancen hat. In Tab. 2 sind auch schon die Erwartungswerte der jeweiligen Muster eingetragen, deren Berechnung Inhalt von Abschnitt 4.2 ist.

Die Wahrscheinlichkeiten können alle nach demselben Schema wie oben berechnet werden (wobei das Lösen des jeweiligen Gleichungssystems bei Einsatz eines CAS auch kein zeitliches bzw. motivationales Problem darstellen sollte). 8 von den 28 möglichen Paarungen dreigliedriger Muster brauchen nicht durchgerechnet zu werden, da von vornherein feststeht, daß keines der beiden Muster bevorzugt werden kann (Symmetrieüberlegungen bzgl. *K*-*A*; oder: Unterschiede nur an der dritten Stelle). Bei den restlichen 20 Fällen (Paarungen) sind jeweils 2 symmetrisch zueinander bzgl. *K* und *A*, so daß also in Wirklichkeit nur 10 Fälle (Paarungen) zu untersuchen bleiben (aber ohne CAS braucht man auch für 10 einfache 4×4-Systeme einiges an Durchhaltevermögen).

Wir erhalten dadurch ein Beispiel einer nichttransitiven (weil zyklischen) Beziehung: „Muster *X* kommt mit einer Wahrscheinlichkeit $p > \frac{1}{2}$ vor Muster *Y* " (bzw. „Muster *X* ist *besser* als Muster *Y* "), in Zeichen: $X \overset{p}{>} Y$. Es gilt nämlich z.B., wie man aus Tab. 2 erkennt (ausgehend von *AAK* kommt man wieder zu *AAK*, wobei jedesmal die zugehörige „Siegeswahrscheinlichkeit" (deutlich!) größer als $\frac{1}{2}$, also jedes Muster deutlich besser als sein Vorgänger ist):

$$AAK \overset{2/3}{>} AKK \overset{3/4}{>} KKA \overset{2/3}{>} KAA \overset{3/4}{>} AAK.$$

„Nichttransitivität": Aufgrund der ersten drei „Besser"-Relationen dürfte man bei Transitivität von „besser" ja *AAK besser als KAA*, in Zeichen $AAK \overset{p}{>} KAA$ mit $p > \frac{1}{2}$ erwarten, was durch die letzte Relation ja widerlegt ist.

Nichttransitivität ist bei vielen Relationen im Alltag nichts Ungewöhnliches. Aus „*A* ist Vater von *B* " und „*B* ist Vater von *C* " kann natürlich nicht „*A* ist Vater von *C* " folgen (dies ist hier sogar unmöglich); aus „*A* ist verliebt in *B* " und „*B* ist verliebt in *C* " muß natürlich noch lange nicht „*A* ist verliebt in *C* " folgen. Auch im Bereich der Mathematik sind intransitive Beziehungen nichts Ungewöhnliches: Aus „4 teilt nicht 10" und „10 teilt nicht 16" folgt natürlich nicht „4 teilt nicht 16", die Relation „teilt nicht" ist also intransitiv.

Jedoch bei quantifizierenden Relationen wie „größer", „schwerer", „heller" etc. erwartet man naturgemäß Transitivität. Auch „besser" ist i.a. eine solche quantifizierende Relation, bei der man sich berechtigterweise Transitivität erwartet. Obiger Begriff „besser" heißt aber nicht „absolut besser", sondern nur besser im Sinne von „das eine Muster gewinnt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $p > \frac{1}{2}$ gegen das andere", es ist also im Zweikampf der jeweils beteiligten Muster zu bevorzugen („besser"). Weil aber auch diesem „stochastischen Besser-sein" etwas Quantifizierendes anhaftet, so erwartet man sich intuitiv auch hier Transitivität, eine Erwartung, die jedoch enttäuscht wird, und das ist doch für die meisten überraschend!

Bemerkungen:

- Man sieht an den Zeilen in Tab. 2, daß alle reinen und alle symmetrischen Muster (*KKK*, *KAK*, *AKA*, *AAA*) niemals das beste Gegenmittel zu einem vorher gewählten Muster des Gegenspielers darstellen, und daß die Rolle des besten Gegenmittels zwischen den anderen vier Mustern gleichmäßig aufgeteilt ist – bei jeweils zwei Mustern als Erstwahl (wichtig für Julian).
- Weiters sieht man an den Spalten auch, daß es nur drei „Klassen" von Erstwahlen gibt (wichtig für Julia): die schlechtesten wären *KKK* bzw. *AAA* (hier könnte Julian seine Gewinnwahrscheinlichkeit auf $\frac{7}{8}$ steigern), die zweitschlechtesten wären *KKA* bzw. *AAK* (Gewinnwahrscheinlichkeit von Julian = $\frac{3}{4}$), und die drittschlechtesten („besten") wären *KAK*, *AKK*, *KAA*, *AKA* – hier hätte Julian eine Chance von „nur" $\frac{2}{3}$.
- Wenn Julia ihr Muster aus den acht möglichen gleichverteilt (also jedes mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$, was natürlich unklug wäre) und geheim wählte, Julian ihr Muster also erst nach seiner eigenen Wahl erfahren würde (bei zufällig gleichem Muster → Wahlwiederholung), so müßte Julian jenes Muster aus Tab. 2 nehmen, dessen Zeilensumme maximal ist, um die größte durchschnittliche Gewinnchance zu haben. Dies ist der Fall bei *AKK* bzw. *KAA* (durchschnittliche Gewinnchance ≈ 0.58). Die zweitbesten Muster in diesem Sinne wären *KKA* bzw. *AAK*; durchschnittliche Gewinnchance ≈ 0.56.
- Die beobachtete Unfairneß des Spiels besteht nicht nur bei 3-gliedrigen Mustern, sondern bei jedem $n \geq 3$: zu jedem n-gliedrigen Muster gibt es ein anderes n-gliedriges Muster, das sich mit einer Wahrscheinlichkeit $p > \frac{1}{2}$ *früher* in einer zufälligen Serie ergibt, also „besser" in diesem Sinne ist (siehe z.B. Chen/Zame 1977). Bei jedem $n \geq 3$ gibt es also Intransitivitäten dieses Begriffes „besser".

4.2 Erwartungswerte bei dreigliedrigen Mustern

Ganz analog zu zweigliedrigen Mustern können wir mit Hilfe bedingter Erwartungswerte und dem „Satz vom totalen Erwartungswert" die Erwartungswerte für die bei den einzelnen dreigliedrigen Mustern nötige Anzahl von Münzwürfen berechnen. Man erhält die schon in Tab. 2 angegebenen Erwartungswerte (= durchschnittlich nötige Anzahl von Würfen, bis das jeweilige Muster erstmals zusammenhängend erscheint): 14, 8, 10, 8, 8, 10, 8, 14.

An einem Beispiel sei die Berechnung vorgeführt: $E(KKA) = 8$.

Da in diesem Beispiel natürlich nur der Erwartungswert $E(KKA)$ und kein anderer vorkommt, lassen wir – der Übersichtlichkeit halber – das Argument *KKA* im folgenden weg. Wir arbeiten wieder mit dem Satz vom totalen Erwartungswert und brauchen dafür eine geeignete Ereignisdisjunktion bzw. die zugehörigen bedingten Erwartungswerte in diesen „Sonderfällen". Wir führen diese Ereignisdisjunktion (wie bei den bedingten Wahrscheinlichkeiten) nach den vier möglichen Anfangspaaren einer Serie durch und bezeichnen mit E_{AA}, E_{AK}, E_{KA}, E_{KK} die bedingten Erwartungswerte (für *KKA*) unter der Voraussetzung, daß die ersten beiden Würfe *AA*, *AK*, *KA*, *KK* waren. Je zwei dieser Startmuster sind klarerweise wieder gleichwahrscheinlich, so daß jedem von ihnen eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ zukommt. Für die genannten bedingten Erwartungswerte erhalten wir die Beziehungen (hinter diesen steckt letztlich wieder der Satz vom totalen Erwartungswert):

$$E_{AA} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{AA} + \tfrac{1}{2}E_{AK}$$
$$E_{AK} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{KA} + \tfrac{1}{2}E_{KK}$$
$$E_{KA} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{AA} + \tfrac{1}{2}E_{AK}$$
$$E_{KK} = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 2 + \tfrac{1}{2}E_{KK}.$$

Die erste Gleichung besagt z.B., daß nach dem Startmuster *AA* mit gleicher Wahrscheinlichkeit (jeweils $\frac{1}{2}$) ein *A* oder ein *K* fällt: Fällt ein *A* an der dritten Stelle, so liegt erneut das Startmuster *AA* vor (an zweiter und dritter Stelle; wegen der 1. Stelle jeweils „1 +..."); fällt ein *K*, so liegt *AK* als neues Startmuster vor. Ganz analog sind die zweite und dritte Gleichung zu interpretieren. Vierte Gleichung: Fällt nach *KK* an dritter Stelle ein *A*, so ist *KKA* erreicht (mit 2 Würfen nach dem ersten *K*), fällt ein weiteres *K*, so liegt wieder das Anfangsmuster *KK* vor. Dieses lineare Gleichungssystem in vier Unbekannten hat die Lösung

$$E_{AA} = 10,\quad E_{AK} = 8,\quad E_{KA} = 10,\quad E_{KK} = 4.$$

[Der Wert $E_{KK} = 4$ ist auch ohne obige Gleichung(en) klar: Wenn bereits *KK* gefallen ist (2 Würfe), so ist die Frage nach *KKA* gleichzusetzen mit der Frage nach dem nächsten *A*, auf das man – wie wir wissen – durchschnittlich 2 Würfe lang warten muß, daher $E_{KK} = 2 + 2 = 4$.] Mit diesen Werten erhalten wir für den in Rede stehenden Erwartungswert $E = E(KKA)$

$$E = \tfrac{1}{4}(E_{AA} + E_{AK} + E_{KA} + E_{KK}) = \tfrac{1}{4}(10 + 8 + 10 + 4) = 8.$$

Damit hat man natürlich auch (Symmetrie) $E(AAK) = 8$ gezeigt.

Zusammenfassung von „Überraschungen" bei 3- und 2-gliedrigen Mustern

Es gibt bei 3-gliedrigen Mustern einige Paarungen, die zwar gleichen Erwartungswert haben, wobei aber die Auftrittswahrscheinlichkeit des einen vor dem anderen ungleich $\frac{1}{2}$ ist (in Tab. 2 mit `typewriter`-Schriftbild), z.B.:

$$AKK - KKA: E(AKK) = E(KKA) = 8,$$
$$\text{aber } P(AKK \text{ vor } KKA) = \tfrac{3}{4};$$
$$KKA - KAA: E(KKA) = E(KAA) = 8,$$
$$\text{aber } P(KKA \text{ vor } KAA) = \tfrac{2}{3};$$

(analog bei Vertauschung von K und A). Dieses Phänomen kann bei 2-gliedrigen Mustern noch nicht beobachtet werden: es gibt bei 2-gliedrigen Mustern nämlich nur zwei Paarungen, bei denen sich in der Sichtweise *kommt früher als* ein Wert $\neq \frac{1}{2}$ ergibt (siehe oben) – die durch *kommt früher als* bevorzugten Muster haben aber auch kleineren Erwartungswert:

$$P(AK \text{ vor } KK) = \tfrac{3}{4};\quad E(AK) = 4,\quad E(KK) = 6\,.$$
$$P(KA \text{ vor } AA) = \tfrac{3}{4};\quad E(KA) = 4,\quad E(AA) = 6\,.$$

Genauso gibt es bei 3-gliedrigen Mustern einige Fälle (Paarungen), bei denen die Auftrittswahrscheinlichkeit des einen vor dem anderen gleich $\frac{1}{2}$ ist, aber die Erwartungswerte (deutlich) verschieden sind (siehe Tab. 2, Kennzeichnung durch *kursiv*-Schriftbild), z.B.:

$$KKK - KKA:\quad E(KKK) = 14\quad E(KKA) = 8\,,$$
$$KAK - AKK:\quad E(KAK) = 10\quad E(AKK) = 8\,,$$
$$KAK - KAA:\quad E(KAK) = 10\quad E(KAA) = 8\,;$$

(analog bei Vertauschung von K und A). Dieses zweite Phänomen war schon bei 2-gliedrigen Mustern zu sehen:

$$P(KA \text{ vor } KK) = \tfrac{1}{2},$$
$$\text{aber } E(KA) = 4 \text{ und } E(KK) = 6\,;$$
$$P(AK \text{ vor } AA) = \tfrac{1}{2},$$
$$\text{aber } E(AK) = 4 \text{ und } E(AA) = 6\,.$$

Die beiden Sichtweisen können also schon bei 2- bzw. 3-gliedrigen Mustern bei einer festen Musterpaarung *Gleichwahrscheinlichkeit* bzw. *Bevorzugung eines Musters* bringen!

4.3 Viergliedrige Muster

Die oben schon angegebene Wahrscheinlichkeit $P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{9}{14}$ kann (mittels des nun bereits bekannten Schemas und des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit) durch ein 8×8-System für die einzelnen bedingten Wahrscheinlichkeiten (P_{AAA}, P_{AAK}, P_{AKA}, P_{KAA}, P_{AKK}, P_{KAK}, P_{KKA}, P_{KKK}) berechnet werden [P_{AAA} bezeichne die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „$KAKA$ vor $AKAA$" unter der Bedingung, daß die ersten drei Würfe das Ergebnis AAA hatten; die anderen Werte analog]. Durch die Lösung des Gleichungssystems (die Lösungen sind rechts in Klammer angegeben)

$$P_{AAA} = \tfrac{1}{2}P_{AAA} + \tfrac{1}{2}P_{AAK} \qquad (P_{AAA} = \tfrac{4}{7})$$
$$P_{AAK} = \tfrac{1}{2}P_{AKA} + \tfrac{1}{2}P_{AKK} \qquad (P_{AAK} = \tfrac{4}{7})$$
$$P_{AKA} = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}P_{KAK} \qquad (P_{AKA} = \tfrac{3}{7})$$
$$P_{KAA} = \tfrac{1}{2}P_{AAA} + \tfrac{1}{2}P_{AAK} \qquad (P_{KAA} = \tfrac{4}{7})$$
$$P_{AKK} = \tfrac{1}{2}P_{KKA} + \tfrac{1}{2}P_{KKK} \qquad (P_{AKK} = \tfrac{5}{7})$$
$$P_{KAK} = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}P_{AKK} \qquad (P_{KAK} = \tfrac{6}{7})$$
$$P_{KKA} = \tfrac{1}{2}P_{KAA} + \tfrac{1}{2}P_{KAK} \qquad (P_{KKA} = \tfrac{5}{7})$$
$$P_{KKK} = \tfrac{1}{2}P_{KKA} + \tfrac{1}{2}P_{KKK} \qquad (P_{KKK} = \tfrac{5}{7})$$

ergibt sich für den Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit $P = P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{7}+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\right) = \frac{9}{14}$.

In ganz analoger Weise können auch die *Erwartungswerte* bei viergliedrigen Mustern berechnet werden durch 8 lineare Gleichungen in 8 Unbekannten, i.e. bedingte Erwartungswerte E_{AAA}, E_{AAK}, E_{AKA}, E_{KAA}, E_{AKK}, E_{KAK}, E_{KKA}, E_{KKK} – Satz vom totalen Erwartungswert. Es bezeichne E_{AAA} den bedingten Erwartungswert der Anzahl nötiger Würfe für $KAKA$ unter der Bedingung, daß die ersten drei Würfe das Ergebnis AAA hatten; die anderen bedingten Erwartungswerte analog. So können z.B. die oben schon angegebenen Werte für $E(AKAA) = 18$ und $E(KAKA) = 20$ berechnet werden. Wir wollen dies zunächst für $\boxed{E \overset{\text{def}}{=} E(KAKA) = 20}$ zeigen. Es gilt (Satz vom totalen Erwartungswert)

$$E = \tfrac{1}{8}(E_{AAA} + E_{AAK} + E_{AKA} + E_{KAA} + E_{AKK} + E_{KAK} + E_{KKA} + E_{KKK})\,.$$

Wir haben also zuerst diese bedingten Erwartungswerte zu berechnen mit Hilfe der folgenden 8 linearen Gleichungen (die jeweiligen Lösungen sind rechts in Klammer angegeben):

$$E_{AAA} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{AAA} + \tfrac{1}{2}E_{AAK} \qquad (E_{AAA} = 23)$$
$$E_{AAK} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{AKA} + \tfrac{1}{2}E_{AKK} \qquad (E_{AAK} = 21)$$
$$E_{AKA} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{KAA} + \tfrac{1}{2}E_{KAK} \qquad (E_{AKA} = 19)$$
$$E_{KAA} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{AAA} + \tfrac{1}{2}E_{AAK} \qquad (E_{KAA} = 23)$$
$$E_{AKK} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{KKA} + \tfrac{1}{2}E_{KKK} \qquad (E_{AKK} = 21)$$
$$E_{KAK} = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 3 \;\; + \tfrac{1}{2}E_{AKK} \qquad (E_{KAK} = 13)$$
$$E_{KKA} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{KAA} + \tfrac{1}{2}E_{KAK} \qquad (E_{KKA} = 19)$$
$$E_{KKK} = 1 + \tfrac{1}{2}E_{KKA} + \tfrac{1}{2}E_{KKK} \qquad (E_{KKK} = 21).$$

Für $E = E(KAKA)$ – das arithmetische Mittel dieser 8 Werte – erhalten wir dadurch 20.

Nun interessieren wir uns für den Erwartungswert $\boxed{E \overset{\text{def}}{=} E(AKAA)}$. Ganz analog ergibt sich in diesem Fall (die Lösungen sind wieder rechts in Klammer angegeben):

$$
\begin{aligned}
E_{AAA} &= 1 + \tfrac{1}{2}E_{AAA} + \tfrac{1}{2}E_{AAK} && (E_{AAA} = 19)\\
E_{AAK} &= 1 + \tfrac{1}{2}E_{AKA} + \tfrac{1}{2}E_{AKK} && (E_{AAK} = 17)\\
E_{AKA} &= 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 3 \quad + \tfrac{1}{2}E_{KAK} && (E_{AKA} = 11)\\
E_{KAA} &= 1 + \tfrac{1}{2}E_{AAA} + \tfrac{1}{2}E_{AAK} && (E_{KAA} = 19)\\
E_{AKK} &= 1 + \tfrac{1}{2}E_{KKA} + \tfrac{1}{2}E_{KKK} && (E_{AKK} = 21)\\
E_{KAK} &= 1 + \tfrac{1}{2}E_{AKA} + \tfrac{1}{2}E_{AKK} && (E_{KAK} = 17)\\
E_{KKA} &= 1 + \tfrac{1}{2}E_{KAA} + \tfrac{1}{2}E_{KAK} && (E_{KKA} = 19)\\
E_{KKK} &= 1 + \tfrac{1}{2}E_{KKA} + \tfrac{1}{2}E_{KKK} && (E_{KKK} = 21).
\end{aligned}
$$

Für $E = E(AKAA)$ (arithmetisches Mittel) erhalten wir hier 18. Tabelle 3 gibt einen Überblick über die Erwartungswerte bei den einzelnen 4-gliedrigen Mustern.

KKKK	*KKKA*	*KKAK*	*KAKK*	*AKKK*	*KKAA*	*KAKA*	*KAAK*
30	16	18	18	16	16	20	18
AAAA	*AAAK*	*AAKA*	*AKAA*	*KAAA*	*AAKK*	*AKAK*	*AKKA*

Tab. 3: Erwartungswerte der einzelnen viergliedrigen Muster

Trotz aller getätigten Rechnungen bzgl. Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten kann u.U. ein Unbehagen bleiben: wie ist dieser „Widerspruch" in den Sichtweisen überhaupt möglich, wie ist dieser zu erklären? Wenn ein Muster X im Vergleich zu einem anderen Muster Y meistens früher kommt, so müßte ja auch die mittlere nötige Wurfzahl für X kleiner sein als jene für Y, oder?!

Daß dies nicht unbedingt so sein muß, zeigen zwar die Rechnungen, aber eine u.E. wichtige Formulierung, die zwar etwas „salopp" ausgeführt ist, ist folgende. Sie kann durchaus ein (erstes, letztes) Aha-Erlebnis bzw. vor allem persönliches Einsehen und Verständnis für den inneren Grund dieses „Widerspruches" bringen und Abhilfe schaffen gegen (trotz der numerischen Ergebnisse allenfalls weiterhin vorhandene) Gedanken wie: „Ich habe die mathematischen Begründungen und Rechnungen zwar verstanden und glaube daher an deren Resultat, aber innerlich verstanden, *warum es zu diesem Widerspruch kommt*, habe ich nicht."

Heuristische, aber vielleicht lehrreiche Formulierung:

Das Muster *AKAA* kommt zwar „meistens" (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{14}$) erst später als *KAKA*, aber *wenn AKAA* früher kommt, so kommt es offenbar meist *deutlich früher*, so daß „im Mittel" die für *AKAA* nötige Wurfzahl trotzdem kleiner ist. Erwartungswerte stehen in einer engen Beziehung zu Mittelwerten: Erwartungswerte sind einerseits Vorhersage- bzw. Schätzwerte für die zugehörigen (empirischen) Mittelwerte und umgekehrt (genauso wie Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten) und andererseits sind sie selbst per definitionem gewichtete arithmetische Mittelwerte. Das arithmetische Mittel ist bekanntlich sehr empfindlich gegenüber sogenannten „Ausreißern" (besonders große bzw. kleine Werte), so daß sich diese Eigenschaft in natürlicher Weise auf Erwartungswerte überträgt! D.h. wenn *AKAA* in *einigen* Fällen *deutlich* früher kommt als *KAKA* („Ausreißer"), so kann dies „ausreichen", daß im Mittel für *AKAA* weniger Würfe nötig sind, obwohl *AKAA* in den meisten Fällen bzw. Serien (offenbar nur relativ) später kommt als *KAKA*.

„Interpretationen" bei *KAKA* – *AKAA*:

Zwei Personen vereinbaren, jeweils eines der beiden Muster *KAKA* bzw. *AKAA* zu wählen. Eine Münze wird wiederholt geworfen; nun kann man sich (mindestens) drei verschiedene Spielregeln vorstellen, die mit unserem Paradoxon zusammenhängen:

(1) Gewonnen hat derjenige, dessen Muster zuerst als *Wort* (Ergebnis von 4 aufeinanderfolgenden Würfen) kommt; dann ist es klüger, sich für *KAKA* zu entscheiden.

(2) Es wird vereinbart, viele (z.B. 100 oder 1000) Serien zu werfen. Jede Serie dauert solange, bis beide Muster erschienen sind (jedes endliche Muster erscheint mit Wahrscheinlichkeit 1 in einer beliebig langen Serie): Nach dem Erscheinen des zweiten (in der jeweiligen Serie später erscheinenden) Musters erfolgt ein Abbruch der laufenden Serie und Start einer neuen (z.B.: in einer Serie erscheint *KAKA* erstmalig an der 12. Stelle und nach insgesamt 20 Würfen, also 8 Würfe später, ergibt sich auch *AKAA* in dieser Serie; nun wird eine neue Serie gestartet). Jeder Spieler notiert bei jeder Serie die Anzahl von Würfen, bis sein Muster erschienen ist und bekommt dadurch viele (z.B. 100 oder 1000) Werte; der Spieler mit *KAKA* müßte bei obiger Beispielserie 12 und der Spieler mit *AKAA* müßte 20 notieren. Sieger ist nun derjenige, dessen *Durchschnittswert aller 100 bzw. 1000 Werte* (arithmetisches Mittel) kleiner ist. Bei diesem Spiel ist der Spieler mit *AKAA* bevorzugt!

(3) Es wird vereinbart, daß „die für das Spiel entscheidenden 4-gliedrigen Muster" nur jene der Blöcke 1–4, 5–8, 9–12, etc. sind (im Gegensatz zu den obigen beiden Spielregeln, bei denen alle möglichen 4-er Blöcke einer Serie zählen, also auch z.B. die Blöcke 2–5, 3–6, 4–7, etc.) M.a.W.: Nach jedem abgeschlossenen Viererblock gilt die Devise: Neues Spiel, neues Glück; „Überschneidungen" zwischen den „gültigen" Viererblöcken werden nicht beachtet. [Man könnte auch sagen: es werden immer nur Serien der Länge 4 geworfen, dann jeweils Neustart.] Sieger ist derjenige, dessen Muster früher in einem „gültigen Viererblock" erscheint. Dann sind die Muster der einzelnen Viererblöcke (1–4, 5–8, 9–12, etc.) wohl voneinander unabhängig (einzelne unabhängige Serien der Länge 4) und beide Muster sind für dieses Spiel gleichgut!

Die Tab. 4 und 5 (siehe Beitragsende) geben einen Überblick über Erwartungswerte und Siegeswahrscheinlichkeiten bei viergliedrigen Mustern (siehe dazu auch die Legende zu Tab 2).

Bemerkungen:

(a) Es gibt bei 4-gliedrigen Mustern (wie bei 3-gliedrigen) sowohl eine Fülle von Paarungen mit zwar gleichen Erwartungswerten, aber unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten bzgl. „kommt früher als" (in den Tab. 4 und 5 durch `typewriter` gekennzeichnet) als auch viele Paarungen mit zwar gleichen diesbezüglichen Wahrscheinlichkeiten, aber unterschiedlichen durchschnittlichen Wartezeiten (Erwartungswerten) – in den Tab. 4 und 5 *kursiv* gekennzeichnet.

(b) Erstmalig bei 4-gliedrigen Mustern können aber die beiden Sichtweisen „kommt früher als" bzw. „Erwartungswert" das *echte Gegenteil voneinander* bringen, d.h. nicht nur „Gleichwahrscheinlichkeit" gegen „Bevorzugung eines Musters", sondern sogar *Bevorzugung des einen Musters* gegen *Bevorzugung des anderen Musters* (bei allen vier Paaren auch Vertauschung der Rollen $K \leftrightarrow A$ möglich):

$$P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{9}{14} > \frac{1}{2},$$
$$\text{aber } E(KAKA) = 20 > 18 = E(AKAA).$$

$$P(KAKK \text{ vor } AKKK) = \frac{7}{12} > \frac{1}{2},$$
$$\text{aber } E(KAKK) = 18 > 16 = E(AKKK).$$

$$P(KAKK \text{ vor } KKAA) = \frac{4}{7} > \frac{1}{2},$$
$$\text{aber } E(KAKK) = 18 > 16 = E(KKAA).$$

$$P(KAAK \text{ vor } AAKK) = \frac{7}{12} > \frac{1}{2},$$
$$\text{aber } E(KAAK) = 18 > 16 = E(AAKK).$$

(c) Würden Julia und Julian mit 4-gliedrigen Mustern spielen, so betrüge Julians Gewinnwahrscheinlichkeit jedenfalls (mindestens) $\frac{9}{14}$, ein Wert, der sogar etwas kleiner als der entsprechende Wert $\frac{2}{3}$ bei 3-gliedrigen Mustern ist. D.h. mit wachsendem n muß bei diesem Spiel die Unfairneß nicht notwendig noch größer werden.

(d) Beispiel einer zyklischen Kette bei 4-gliedrigen Mustern (nichttransitive Relation *besser* bei „kommt früher als"):

$$KKAK \overset{5/7}{>} KAKA \overset{9/14}{>} AKAA \overset{4/7}{>} AAKK \overset{9/14}{>} KKAK$$

5 Erwartungswerte bei n-gliedrigen Mustern

Trivialerweise haben je zwei Muster, die K-A-symmetrisch sind, dieselbe durchschnittliche Wartezeit (denselben Erwartungswert), z.B. *KAKKAA* und *AAKKAK* (jeweils 64). Es gilt außerdem (zwar nicht trivialerweise, aber doch): Je zwei Muster, von denen jedes das „rückwärts" gelesene des jeweils anderen ist, haben gleiche durchschnittliche Wartezeit (Erwartungswert); dies folgt auch z.B. aus Li 1980.

Allgemein gilt bei n-gliedrigen Mustern: Der Erwartungswert (durchschnittliche Wartezeit) für die Serie $\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}} A = 2^n$ ist *minimal* unter allen n-gliedrigen Mustern, er beträgt 2^n. Die „reinen Serien" (n-mal K oder n-mal A) haben die längsten durchschnittlichen Wartezeiten, sie betragen $2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1)$:

$$\boxed{E(\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}} A) = 2^n}$$

$$\boxed{E(\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}} K) = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1)}.$$

[Die *Maximalität* bleibt hier unbewiesen. Sie folgt z.B. – wie die vorher erwähnte *Minimalität* – aus der Arbeit von Li 1980.] Obwohl die beiden *Wahrscheinlichkeiten*, daß das eine Muster bzw. das andere zuerst kommt, *gleich groß* sind (nach (n-1)-mal K fällt mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein weiteres K oder A), muß man somit im Durchschnitt *fast doppelt so lange* auf eine reine K-Serie der Länge n warten wie auf eine K-Serie der Länge n-1 und daraufolgendes A.

Man könnte vermuten, daß dieses Phänomen – eventuell unbewußt – eine Ursache dafür ist, daß viele Leute nach einer relativ langen „Rot-Serie *beim Roulette" intuitiv viel eher „Schwarz" erwarten als erneut „Rot" (oder A nach einer K-Serie).*

Lemma:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=1+2\cdot\frac{1}{2^1}+3\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots=4}.$$

Beweis: Aus der bekannten Beziehung $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ = $\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$ = $\left(\frac{x}{1-x}\right)'$ = $\frac{1}{(1-x)^2}$ für $|x|<1$ ergibt sich für $x=\frac{1}{2}$ unmittelbar: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$ = $1+2\cdot\frac{1}{2^1}$ + $3\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4.$

Vollständige Induktion: $\boxed{E(\underbrace{K...KK}_{n\text{-mal}})=2^{n+1}-2}$.

Für $n = 1, 2, 3$ haben wir die entsprechenden Werte 2, 6, 14 schon bestätigt. Unter der Annahme der Gültigkeit von $E(\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}})=2^n-2$ haben wir

$$E(\underbrace{K...KK}_{n\text{-mal}})=2^{n+1}-2$$

zu zeigen.

Wir betrachten das „Geschehen" nach dem ersten Block $\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}}$. Der Erwartungswert für diesen ersten Block beträgt 2^n-2, wie wir aus der Induktionsvoraussetzung wissen.

Die Münze kann nun beim nächsten Wurf K zeigen ($E=2^n-2+1=2^n-1$, $p=\frac{1}{2}$) oder A. Im zweiten Fall ist erneut auf den nächsten K-Block [$(n$-1)-mal hintereinander K] zu warten und wieder entscheidet der darauf folgende Wurf: er kann K sein ($E=(2^n-1)+(2^n-1)=2\,(2^n-1)$, $p=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$) oder wieder A usw. Wir erhalten insgesamt (siehe Abb. 1)

$$E(\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}}K)=$$

$$(2^n-1)\cdot\tfrac{1}{2}+2(2^n-1)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+3(2^n-1)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\ldots=$$

$$(2^n-1)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\underbrace{\left(1+2\cdot\frac{1}{2^1}+3\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots\right)}_{=4\text{ (siehe Lemma)}}=2^{n+1}-2.$$

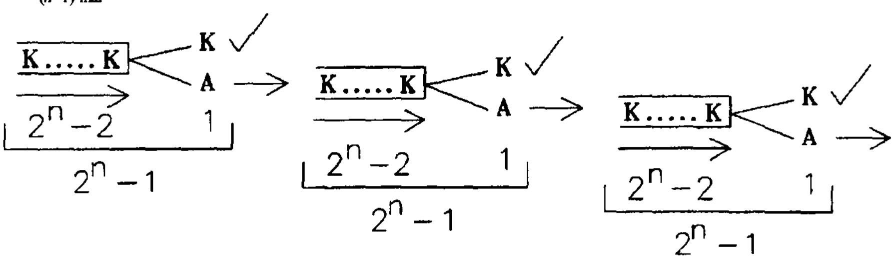

Abb. 1:
$E(K...K)$: Möglichkeiten nach den einzelnen K-Blöcken [$(n$-1)-mal hintereinander K]

Beweis von $\boxed{E(\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}}A)=2^n:}$

Wir wissen von oben und verwenden im folgenden, daß $E(\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}})=2^n-2$ ist. Ganz kurz und lapidar könnte so argumentiert werden: $\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}}A$ bedeutet nichts anderes als Warten auf den ersten K-Block der Länge $n-1$ (der Erwartungswert dafür beträgt 2^n-2) und anschließendes Warten auf das nächste A (dieser Erwartungswert beträgt 2), woraus sich der behauptete Erwartungswert $E(\underbrace{K...K}_{(n-1)\text{-mal}}A)=2^n$ unmittelbar ergibt!

Bemerkung: Es gibt außer der hier dargestellten Methode noch einige andere zur Berechnung von mittleren Wartezeiten (Erwartungswerten) und Siegeswahrscheinlichkeiten („Muster X kommt früher als Muster Y"). Drei davon seien mit einem Literaturverweis erwähnt: (1) mit Hilfe unendlicher Reihen (jeweiliges Einsetzen in die *Definition* der Erwartungswerte – siehe z.B. Humenberger 1998b; (2) mit Hilfe von Graphen und den „Mittelwertsregeln" – siehe z.B. Engel 1976, S. 18ff (insbesondere S. 22–26); (3) mit Hilfe des sogenannten Conway-Algorithmus – beschrieben z.B. in Gardner (1974, S. 123) oder Szekely (1990, S. 62); dieser ist zwar sehr „verblüffend" und auch sehr leicht durchzuführen, aber relativ schwierig einzusehen bzw. zu begründen (z.B. Li 1980).

	KKKK (30)	*KKKA* (16)	*KKAK* (18)	*KAKK* (18)	*AKKK* (16)	*KKAA* (16)	*KAKA* (20)	*KAAK* (18)
KKKK (30)	–	*1/2*	2/5	3/10	1/16	2/5	5/12	4/11
KKKA (16)	*1/2*	–	$\boxed{2/3}$	*1/2*	1/8	$\boxed{2/3}$	5/8	4/7
KKAK (18)	3/5	1/3	–	3/5	5/12	*1/2*	$\boxed{5/7}$	1/2
KAKK (18)	7/10	*1/2*	2/5	–	**7/12**	**4/7**	*1/2*	1/2
AKKK (16)	$\boxed{15/16}$	$\boxed{7/8}$	7/12	**5/12**	–	7/12	9/16	*1/2*
KKAA (16)	3/5	1/3	*1/2*	**3/7**	5/12	–	5/9	$\boxed{2/3}$
KAKA (20)	7/12	3/8	2/7	*1/2*	7/16	4/9	–	*1/2*
KAAK (18)	7/11	3/7	1/2	1/2	*1/2*	1/3	*1/2*	–
AKKA (18)	5/8	7/16	7/12	5/12	*1/2*	**7/12**	9/16	1/2
AKAK (20)	5/8	7/16	7/16	$\boxed{\mathbf{9/14}}$	*1/2*	7/16	1/2	7/16
AAKK (16)	3/4	7/12	9/14	9/16	$\boxed{2/3}$	1/2	9/16	**5/12**
KAAA (16)	7/11	3/7	*1/2*	*1/2*	1/2	1/3	*1/2*	*1/2*
AKAA (18)	5/8	7/16	7/16	1/2	*1/2*	7/16	**5/14**	7/12
AAKA (18)	5/8	7/16	1/2	9/16	*1/2*	5/14	9/16	5/12
AAAK (16)	15/22	1/2	9/16	9/16	4/7	5/12	9/16	9/16
AAAA (30)	1/2	7/22	3/8	3/8	4/11	1/4	3/8	3/8

Tab. 4:

Teil 1 – Viergliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilenmusters bei „kommt früher als" in einer Wurfserie mit einer Laplace-Münze. Zusätzlich zur Legende zu Tab. 2: **9/14 ... fett** sind jene Werte (≠ ½) gedruckt, bei denen die Sichtweisen „Erwartungswerte" bzw. „Wahrscheinlichkeiten für kommt früher als" sogar zur *gegenteiligen* Einschätzung führen (kommt bei 2- und 3-gliedrigen Mustern nicht vor).

	AKKA (18)	*AKAK* (20)	*AAKK* (16)	*KAAA* (16)	*AKAA* (18)	*AAKA* (18)	*AAAK* (16)	*AAAA* (30)
KKKK (30)	3/8	3/8	1/4	4/11	3/8	3/8	7/22	1/2
KKKA (16)	9/16	9/16	5/12	4/7	9/16	9/16	1/2	15/22
KKAK (18)	5/12	9/16	5/14	*1/2*	9/16	1/2	7/16	5/8
KAKK (18)	7/12	**5/14**	7/16	*1/2*	1/2	7/16	7/16	5/8
AKKK (16)	*1/2*	*1/2*	1/3	1/2	*1/2*	*1/2*	3/7	7/11
KKAA (16)	**5/12**	9/16	1/2	$\boxed{2/3}$	9/16	9/14	7/12	3/4
KAKA (20)	7/16	1/2	7/16	*1/2*	$\boxed{\mathbf{9/14}}$	7/16	7/16	5/8
KAAK (18)	1/2	9/16	**7/12**	*1/2*	5/12	7/12	7/16	5/8
AKKA (18)	–	*1/2*	1/3	*1/2*	1/2	1/2	3/7	7/11
AKAK (20)	*1/2*	–	4/9	7/16	*1/2*	2/7	3/8	7/12
AAKK (16)	$\boxed{2/3}$	5/9	–	5/12	**3/7**	*1/2*	1/3	3/5
KAAA (16)	*1/2*	9/16	7/12	–	**5/12**	7/12	$\boxed{7/8}$	$\boxed{15/16}$
AKAA (18)	1/2	*1/2*	**4/7**	**7/12**	–	2/5	*1/2*	7/10
AAKA (18)	1/2	$\boxed{5/7}$	*1/2*	5/12	3/5	–	1/3	3/5
AAAK (16)	4/7	5/8	$\boxed{2/3}$	1/8	*1/2*	$\boxed{2/3}$	–	*1/2*
AAAA (30)	4/11	5/12	2/5	1/16	3/10	2/5	*1/2*	–

Tab. 5:

Teil 2 – Viergliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilenmusters bei „kommt früher als" in einer Wurfserie mit einer Laplace-Münze.

Literatur

Hentz, H. J. (1983a): Hat die Münze doch ein Gedächtnis?. – In: Der Mathematikunterricht 29 (H. l), S. 8-10

Bentz, H. J. (1983b): Willkürliche und unwillkürliche implizite Lotterien. – In: Der Mathematikunterricht 29 (H. 1), S. 41-46

Bentz, H. J. (1983c): Fehlerhafte Modellbildungen. – In: Der Mathematikunterricht 29 (H. l), S. 70-76

Bentz, H.J. (1983d): Häufigkeiten, relativ und absolut. – In: Der Mathematikunterricht 29 (H. l), S. 77-82

Bentz, H. J. (1985): Über den didaktischen Wert stochastischer Paradoxa. – In: Didaktik-Reihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (H. 13), S. 3-18

Borovcnik, M. (1992): Stochastik im Wechselspiel zwischen Intuitionen und Mathematik. – Mannheim u.a.: Bibliographisches Institut

Buth, M. (1991): Die Behinderung des gesunden Menschenverstandes durch Stochastik. – In: Stochastik in der Schule 11 (H. 3), S. 12-22

Buth, M. (1996): Schwierigkeiten im Umgang mit dem Zufall. – In: mathematica didactica 19 (H. 2), S. 3-17

Bühler, W. J. (1992): Wahrheit und Lüge in der Statistik – häufige Fehlerquellen in der Statistik. – In: Der Mathematikunterricht 38 (H. 4), S. 34-45

Chen, R.; Zame, A. (1977): A Remark on Fair Coin-Tossing Process. – In: Bull. Inst. Math. Statist. 6, S. 278

Christensen, R.; Utts, J. (1992): Bayesian Resolution of the „Exchange Paradox". – In: The American Statistician 46 (H. 4), S. 274-276

Dörfler, W.; Fischer, R. (Hg.) (1981): Stochastik im Schulunterricht. – Stuttgart: Teubner und Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

Engel, A. (1973, 1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (zwei Bände). – Stuttgart: Klett

Engel, J. (1996): Das Achensee-Paradoxon. – In: Stochastik in der Schule 16 (H. l), S. 3-10

Falk, R. (1983a): Vereinfachte Darstellungen einiger Verteilungen und ihrer Erwartungswerte. – In: Der Mathematikunterricht 29 (H. l), S. 62-69

Falk, R. (1983b): Haben Männer mehr Schwestern als Frauen? – In: Stochastik in der Schule 3 (H. 1), S. 21-23

Falletta, N. (1989): Paradoxon. – Frankfurt: Fischer Taschenbuch

Feller, W. (1968): An Introduction to Probability Theory and Its Applications. – New York: John Wiley

Gardner, M. (1970): The Paradox of the Nontransitive Dice and the Elusive Principle of Indifference. – In: Scientific American (H. 223), Dezember 1970, S. 110-114

Gardner, M. (1974): On the Paradoxical Situations That Arise From Nontransitive Relations. – In: Scientific American (H. 231), Oktober 1974, S. 120-125

Gardner, M. (1982): Gotcha. Paradoxes to Puzzle And Delight. – New York: Freeman and Company

Gardner, M. (1983): Wheels, Life and Other Mathematical Amusements. – New York: Freeman and Company

Gray, M. W. (1983): Statistics and the Law. – In: Mathematics Magazine 56 (H. 2), S. 67-81

Green, D.; Rouncefield, M. (1990): Condorcet's Paradoxon. – In: Stochastik in der Schule 10 (H. l), S. 20-25

von Harten, G.; Steinbring, H. (1984): Stochastik in der Sekundarstufe I. – Köln: Aulis Verlag Deubner (IDM-Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht; 8)

Henze, N. (1995): Einige Fallstricke im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten. – In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 48 (H. 5), S. 275-281

Henze, N. (1997): Stochastik für Einsteiger. – Braunschweig-Wiesbaden: Vieweg

Humenberger, H.; Reichel, H.-C. (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. – Mannheim u.a.: Bibliographisches Institut

Humenberger, H. (1996): Das Benford-Gesetz über die Verteilung der ersten Ziffer von Zahlen. – In: Stochastik in der Schule 16 (H. 3), S. 2-17

Humenberger, H. (1997): Eine Ergänzung zum Benford-Gesetz – weitere mögliche schulrelevante Aspekte. – In: Stochastik in der Schule 17 (H. 3), S. 42-48

Humenberger, H. (1998a): Bedingte Erwartungswerte. – In: Stochastik in der Schule 18 (H. 3)

Humenberger, H. (1998b): Kopf-Adler-Muster in Münzwurfserien, unendliche Reihen und Fibonacci-Folgen. Preprint Universität für Bodenkultur, Wien

Ineichen, R. (1983): Zufällig oder nicht-zufällig? – In: Der Mathematikunterricht 29 (H. l), S. 24-40

Jahnke, T. (1993): Das Simpsonsche Paradoxon verstehen – ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 14 (H. 3/4), S. 221-242

Kilian, H. (1987): Bedingte Erwartungswerte im Stochastikunterricht. – In: Stochastik in der Schule 7 (H. 3), S. 24-45

Kirsch, A.; Blum, W. (1994): Bemerkungen zu einer bekannten „probabilistischen Paradoxie". – In: Pickert, G.; Weidig, I. (Hg.), Mathematik erfahren und lehren. Festschrift für Hans-Joachim Vollrath. Stuttgart: Klett, S. 125-133

Krämer, W. (1995): Denkste! Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen. – Frankfurt – New York: Campus

Künzel, E. (1991): Über Simpsons Paradoxon. – In: Stochastik in der Schule 11 (H. l), S. 54-62

Kütting, H. (1994): Didaktik der Stochastik. – Mannheim u.a.: Bibliographisches Institut

Li, S.-Y.R. (1980): A Martingale Approach to the Study of Occurence of Sequence Patterns in Repeated Experiments. – In: The Annals of Probability 8 (H. 6), S. 1171-1176

McColl, J. H. (1995): Probability. Modular Mathematics Series. – London: Edward Arnold

Meyer, J. (1994): Über einige Paradoxa aus der Stochastik. – In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1994, S. 239-242

Meyer, J. (1995a): Einfache Paradoxien in der beschreibenden Statistik. – In: Stochastik in der Schule 15 (H. 2), S. 27-50

Meyer, J. (1995b): Wahlen: Paradoxa bei der Sitzverteilung. – In: mathematica didactica 18 (H. l), S. 21-34

Palm, G. (1983): Wo kommen die Wahrscheinlichkeiten eigentlich her? – In: Der Mathematikunterricht 29 (H. 1), S. 50-61

Penney, W. (1969): Problem: Penney-ante. – In: Journal of Recreational Mathematics 2, S. 241

Pfeifer, D. (1992): Kettenbriefe – was sie versprechen, was sie halten. – In: Stochastik in der Schule 12 (H. 3), S. 37-47

Pflug, G. (1981): Paradoxien in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. – In: Dörfler, W.; Fischer, R. (Hg.), S. 155-163

Reichel, H.-C.; Hanisch, G.; Müller, R. (1992): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky (Mathematik für Schule und Praxis; 1)

Riemer, W. (1989): Das Arcsin-Gesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. – In: Der Mathematikunterricht 35 (H. 4), S. 64-75

Schmidt, G. (1990): Schwächen im gegenwärtigen Stochastikunterricht und Ansätze zu ihrer Behebung. – In: Der Mathematikunterricht 36 (H. 6), S. 20-28

Scholz, R. (1981): Stochastische Problemaufgaben – Analysen aus didaktischer und psychologischer Perspektive. – Universität Bielefeld (IDM-Reihe Materialien und Studien; 23)

Schrage, G. (1971): Ein Paradoxon in der Wahrscheinlichkeitsrechnung? – In: Praxis der Mathematik 13, S. 309-312

Schrage, G. (1984): Stochastische Trugschlüsse. – In: mathematica didactica 7 (H. 3), S. 3-19

Stadler, H. (1986): Paradoxien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Teil 1: Didaktik der Mathematik 14 (H. 2), S. 134-152; Teil 2: Didaktik der Mathematik 14 (H. 3), S. 167-182

Szekely, G. J. (1990): Paradoxa – klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik. – Frankfurt: Harri Deutsch

Tenney, R. L.: Foster, C. C. (1976): Non-Transitive Dominance. – In: Mathematics Magazine 49 (H. 3), S. 115-120

Walter, H. (1983): Heuristische Strategien und Fehlvorstellungen in stochastischen Situationen. – In: Der Mathematikunterricht 29 (H. l), S. 11-23

Winter, H. (1992): Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 13 (H. l), S. 23-53

Wirths, H. (1995): Der Erwartungswert. Unterrichtsskizzen zur Begriffsentwicklung von Klasse 8 bis 13. – In: Mathematik in der Schule 33 (H. 6), S. 330-343

Anschrift des Verfassers:
Hans Humenberger
Institut für Mathematik und Angewandte Statistik
Universität für Bodenkultur
Gregor Mendel-Straße 33
A–1180 Wien
E-mail: hans@mail.boku.ac.at