Die Monty Hall Matrix [1]

JOSEPH G. EISENHAUER, NEW YORK
Übersetzung: JOACHIM ENGEL, LUDWIGSBURG

Zusammenfassung: *Ein allgemeines Verfahren zur Lösung des "Monty Hall Problems" mittels Wahrscheinlichkeitsmatrizen wird vorgestellt und eine n-dimensionale Verallgemeinerung wird gegeben.*

1 Einleitung

Ein altes statistisches Rätsel erfreut sich in letzter Zeit erneuten Interesses. Einst unter der etwas düsteren Bezeichnung als das Problem der drei Gefangenen bekannt, die auf ihre Hinrichtung warten (Gardner, 1957), wird es nun gewöhnlich (siehe Selvin 1975a, 1975b) als "Monty Hall Problem" bezeichnet und ist in den glücklicheren und mehr entscheidungstheoretisch ausgerichteten Kontext einer populären amerikanischen Spiel-Show der 60-er Jahre verlegt. Nachdem es vor etwa zehn Jahren viel öffentliche Aufmerksamkeit erlangt hatte und in der Folge für einige Zeit wieder aus dem Blick der Öffentlichkeit verschwunden war, ist es kürzlich wieder sowohl in akademischen Arbeiten (Friedman, 1998) wie auch in der Presse (The Economist, 1999) diskutiert worden.

Die Situation (an die sich das Fernsehprogramm nicht streng hielt) ist kurz gesagt wie folgt: Monty Hall, der gefeierte Gastgeber von "Let's make a deal" bietet dem Teilnehmer einen spektakulär großartigen Preis an (z.B. ein Auto oder einen Ferienurlaub), falls sie oder er korrekt erraten kann, hinter welcher von drei Türen sich der Preis verbirgt. Die anderen zwei Türen verbergen Nieten oder wertlose Preise, dargestellt durch Ziegen. Nachdem der Kandidat sich für eine Tür entschließt, lässt Monty eine der zwei verbleibenden Türen öffnen, die eine Niete offenbart. Monty bietet dann dem Kandidaten an, seine ursprüngliche Wahl zu revidieren, unabhängig davon was sich hinter der dritten (nicht-gewählten und ungeöffneten) Tür verbirgt. Die statistische Frage, mit der der Kandidat hier konfrontiert wird, lautet dann "Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn die Türen gewechselt bzw. wenn sie nicht gewechselt werden?".

Wie viele gute statistische Rätsel ist auch das Monty Hall Problem etwas trügerisch, und die meisten Leute - Laien genauso wie Wissenschaftler - scheitern anfänglich daran, die zugrunde liegenden Prinzipien zu erfassen. Glücklicherweise ist das Problem zugleich lehrreich und wohl im Bereich dessen, was Schülerinnen und Schüler über bedingte Wahrscheinlichkeiten lernen. Es lässt sich zum Beispiel mittels Wahrscheinlichkeitsbäumen lösen und kann mit Hilfe von Simulationen illustriert werden, wie von Shaughnessy und Dick (1991) vorgeschlagen. In diesem Aufsatz zeige ich, dass keine einzige dieser Antworten notwendigerweise korrekt ist und illustriere einen allgemeinen Lösungsansatz zu dem Problem, indem ich mich auf das vertraute Hilfsmittel einer Wahrscheinlichkeitsmatrix beziehe. Dies ist meine bevorzugte Methode, bedingte Wahrscheinlichkeiten zu lehren und zugleich ein Ansatz, den ich noch nicht bei anderen Lösungsvorschlägen zu diesem Problem gesehen habe. Ich erweitere dann meine Analyse zu einem Spiel mit mehr als drei Türen, zu dem der Matrix-Ansatzes problemlos verallgemeinert werden kann.

2 Die Kontroverse

Wenn nach den Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Wechseln bzw. Nichtwechseln gefragt wird, antwortet die große Mehrheit, dass die Türen bei zwei ungeöffneten Türen und einem Preis hinter einer von beiden gleich attraktiv seien: die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen sei daher in beiden Fällen 1/2. Andererseits - so wird manchmal argumentiert -, da man im Vorfeld weiß, dass Monty eine Nietentür öffnet, hat diese Offenbarung für den Kandidaten keinerlei relevanten Informationsgehalt (siehe z.B. Nalebuff, 1987). Von dieser Warte aus, die Falk (1992) das 'no news' Argument nennt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Preis hinter der zuerst gewählten Tür befindet, weiterhin 1/3, während die Wechselstrategie eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 2/3 hat.

Der Zusammenstoß dieser beiden Sichtweisen führte zu einem Sturm der öffentlichen Entrüstung, als die Journalistin vos Savant (1990a) dieses Problem in einer Serie von Zeitschriftenartikel diskutierte und dabei behauptete, dass die Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Wechseln 2/3 und beim Beharren 1/3 sind. Etwa 10000 Leser, einschließlich wütender Lehrer und Professoren, antworteten mit Briefen, von de-

[1] Übersetzung aus *Teaching Statistics*, 2000 (1), 17-20

nen 90% vos Santos energisch widersprachen (und einige sie persönlich beleidigten) und sich für die 50-50 Lösung aussprachen (Tierney, 1991). Zu der Verwirrung trug noch bei, dass vos Santos eine zweifelhafte Analogie vortrug, dabei ihre ursprünglichen Behauptungen mit einem falschen Beweis versah und außerdem eine falsche Simulation als Methode der empirischen Verifizierung vorschlug (Morgan et al., 1991, S. 284). Als Folge wurde das, was eine korrekte und erhellende Antwort auf das Problem hätte sein können und sollen, wenig überzeugend und irreführend. Nachfolgende Arbeiten von Gillman (1992) und Falk (1992) wandten die korrekte Bayesianische Mathematik an, um eine allgemeine Lösung herzuleiten, aber einige Autoren setzten ihr "no news" Argument weiter fort, das bestenfalls auf unausgesprochenen Annahmen beruht (siehe z.B. Engel und Ventoulias, 1991; Gilovich, 1995).

3 Analyse

So gut wie jeder versteht intuitiv, dass die Wahrscheinlichkeit die Gewinntür korrekt zu raten 1/3 beträgt, vorausgesetzt das Auto ist zufällig hinter einer der drei Türen versteckt. Die Verwirrung bezieht sich auf die Information, die sich in Montys Offenbarung der Nietentür bezieht. Wir nehmen zunächst mal an, dass Monty nicht weiß (oder sich nicht mehr erinnern kann), wo das Auto steht, und daher mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der beiden verschlossenen Türen öffnet. Er setzt sich dabei der Gefahr aus, den Gewinn vorzeitig preiszugeben und eine mögliche Offenbarung einer Niete geschieht durch bloßen Zufall. In diesem Fall geht es hier um unbedingte Wahrscheinlichkeiten und der Kandidat steht nun vor zwei ungeöffneten Türen, hinter der sich mit derselben Wahrscheinlichkeit ein Auto verbirgt. Unter diesen Bedingungen sind die Gewinnchancen genau 50 zu 50, wie die verbreitete Antwort behauptet. Aber Monty *weiß* natürlich hinter welcher Tür sich das Auto verbirgt und vermeidet gezielt, es zu offenbaren (bis das Spiel vorbei ist). Ebenso vermeidet er es, die vom Kandidaten gewählte Tür zu öffnen, um die Zuschauer und den Spieler in Spannung zu halten.

Als Hilfe, um das Problem logisch anzugehen, notieren wir zuerst eine 3×3 Wahrscheinlichkeitsmatrix, die die Reaktionen des Moderators auf den Ort des Autos und die Wahl des Kandidaten zeigt. Jede Spalte repräsentiert einen möglichen Ort des Autos und jede Zeile steht für eine mögliche Tür, die der Moderator öffnet. Jede Zelle repräsentiert eine gemeinsame Wahrscheinlichkeit - d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zwischen einem Offenbarungs- und einem Ortsereignis. Da Monty das Auto nicht zu diesem Zeitpunkt des Spiels zeigen will, besteht die Hauptdiagonale aus lauter Nullen. Genauso wird er nicht die vom Kandidaten gewählte Tür öffnen. Wenn z.B. der Kandidat Tür Nummer 1 wählt, dann besteht die erste Zeile außer lauter Nullen. Wir gehen davon aus, dass dies der Fall ist. Da das Auto zufällig einer der drei Türen zugeordnet ist, sind die Randwahrscheinlichkeiten hinter jedem Ort jeweils 1/3.

Es ist sofort klar, dass Monty gar keine Wahl hat, welche Tür er öffnen soll, falls der Kandidat inkorrekt wählt (wenn er oder sie Tür 1 wählt, das Auto aber hinter Tür 2 oder 3 steht). Nur wenn der Kandidat die richtige Wahl trifft, muss sich der Moderator entscheiden, welche Tür er öffnen will und hier brauchen wir irgendeine Annahme über sein Verhalten.

Um den extremen Fall zuerst zu behandeln: Nehmen wir an, dass der Moderator aufgrund einer exzentrischen Persönlichkeit wann immer möglich die Tür Nummer 2 öffnen will. Dann sieht die Matrix wie in Tabelle 1 aus.

	Auto hinter Tür 1	Auto hinter Tür 2	Auto hinter Tür 3	Randwahrscheinlichkeit
M. öffnet 1	0	0	0	0
M. öffnet 2	1/3	0	1/3	2/3
M. öffnet 3	0	1/3	0	1/3
Randwahrscheinlichkeit.	1/3	1/3	1/3	1

Tab. 1:

In der Notation von Gillman (1992) bezeichne A_i das Ereignis, dass sich das Auto hinter der Tür i befindet, und sei M_j das Ereignis, dass der Moderator Tür j öffnet. Wir interessieren uns für die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet (die Wahl des Kandidaten), vorausgesetzt der Moderator hat eine Niete offenbart. Wenn Monty seine bevorzugte Tür öffnet, dann beträgt die posteriori Gewinnwahrscheinlichkeit mit Tür 1 $P(A_1|M_2) = (1/3)/(2/3) = 1/2$, was wiederum der häufigsten Antwort entspricht. Aber wenn Monty gezwungen ist, eine nicht-bevorzugte Tür zu öffnen, dann sind die posteriori Gewinnwahrscheinlichkeiten $P(A_1|M_3) = 0$ und $P(A_2|M_3) = 1$, was bedeutet, dass die Wechselstrategie immer gewinnt. Natürlich kennt der Kandidat nicht Montys bevorzugte Tür, noch weiß er, ob Monty überhaupt eine Lieblingstür hat.

Daher kann er nicht wissen, welches Paar von Wahrscheinlichkeiten Gültigkeit hat. Jedoch illustrieren die beiden Extreme, dass die Gewinnwahrscheinlichkeiten mit der ursprünglichen Wahl zwischen 0 und 1 liegen, während die Wahrscheinlichkeiten mit der Wechselstrategie zwischen 1/2 und 1 liegen. Konsequenterweise kann die Wechselstrategie den Gewinnchancen keinen Schaden antun und vermag sie sogar deutlich zu verbessern.

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass der Moderator zufällig entscheidet, welche Niete er offenbart, falls der Kandidat die richtige Tür wählt. Die priori Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter irgendeiner bestimmten Tür befindet ist wiederum 1/3. Wiederum nehmen wir an, dass der Kandidat Tür 1 wählt. Wenn er oder sie richtig liegt, dann sind die Wahrscheinlichkeiten 1/2, dass Monty Tür 2 öffnet und ebenso 1/2 für Tür 3. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet und Monty Tür 2 öfnet ist daher $(1/3)(1/2) = 1/6$; in ähnlicher Weise ist $P(A_1 \cap M_3) = 1/6$. Daher ist die neue Matrix wie folgt (Tabelle 2):

	Auto hinter Tür 1	Auto hinter Tür 2	Auto hinter Tür 3	Randwahrscheinlichkeit
M. öffnet 1	0	0	0	0
M. öffnet 2	1/6	0	2/6	3/6
M. öffnet 3	1/6	2/6	0	3/6
Randwahrscheinlichkeit.	1/3	1/3	1/3	1

Tab. 2:

Nun ist $P(A_1|M_3) = (1/6)(3/6) = 1/3$ und $P(A_2|M_3) = 2/3$; in ähnlicher Weise $P(A_1|M_2) = 1/3$ und $P(A_3|M_2) = 2/3$. Hierbei ist die Gewinnwahrscheinlichkeit ohne Wechseln 1/3, egal welche Tür der Moderator öffnet, um die Niete zu zeigen. Hingegen verdoppelt die Wechselstrategie die Gewinnwahrscheinlichkeit, so wie in der 'no news' Hypothese. Und tatsächlich sind A_1 und M_3 stochastisch unabhängige Ereignisse, wenn der Moderator zufällig eine Nietentür wählt, vorausgesetzt er hat die Wahl. Das Gleiche gilt für A_1 und M_2, da $P(A_1|M_3) = P(A_1)$ und $P(A_1|M_2) = P(A_1)$. Jedoch sind weder A_2 und M_3 noch A_3 und M_2 unabhängige Paare, da $P(A_2|M_3) \neq P(A_2)$ und $P(A_3|M_2) \neq P(A_3)$.

Natürlich sind auch andere Annahmen möglich, wenn wir das Verhalten des Moderators angesichts seiner Entscheidung betrachten. Wir können unsere Analyse verallgemeinern, indem wir ansetzen $P(A_1 \cap M_3) = x/3$, immer noch unter der Annahme, dass der Kandidat anfänglich sich für Tür Nummer 1 entscheidet. Tabelle 3 zeigt die resultierende Wahrscheinlichkeitsmatrix, wobei x die bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass Monty Tür 3 öffnet, vorausgesetzt das Auto befindet sich hinter Tür 1: $P(M_3|A_1) = (x/3)/(1/3) = x$.

	Auto hinter Tür 1	Auto hinter Tür 2	Auto hinter Tür 3	Randwahrscheinlichkeit
M. öffnet 1	0	0	0	0
M. öffnet 2	(1-x)/3	0	1/3	(2-x)/3
M. öffnet 3	x/3	1/3	0	(1+x)/3
Randwahrscheinlichkeit.	1/3	1/3	1/3	1

Tab. 3:

Wenn nun Monty eine Niete hinter Tür 3 offenbart, dann ist die posteriori Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat mit seiner ursprünglichen Wahl (Tür 1) gewinnt $P(A_1|M_3) = (x/3)/[(1+x)/3] = x/(1+x)$ und die posteriori Gewinnwahrscheinlichkeit beim Wechseln auf Tür 2 ist $P(A_2|M_3) = (1/3)/[(1+x)/3] = 1/(1+x)$. Da $0 \leq x \leq 1$, kann das Wechseln die Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen, wird sie aber niemals vermindern. In ähnlicher Weise ist $P(A_1|M_2) = (1-x)/(2-x)$, was immer nur höchstens soviel ist wie $P(A_3|M_2) = 1/(2-x)$. Natürlich umfasst diese Verallgemeinerung unseren anfangs betrachteten Fall: wenn Monty Tür 2 bevorzugt, dann ist $x = 0$; offenbart er Nieten zufällig, so ist $x = 1/2$. Wir können dieselbe Beziehung aus dem Satz von Bayes herleiten, nach dem $P(A_1|M_3) = P(M_3|A_1)P(A_1)/P(M_3)$ ist. Setzen wir $P(M_3|A_1) = x, P(A_1) = 1/3$ und $P(M_3) = (1+x)/3$ ein, so ergibt sich $P(A_1|M_3) = P(M_3|A_1)/[1+P(M_3|A_1)]$ und die komplementäre Wahrscheinlichkeit $P(A_2|M_3) = 1/[1+P(M_3|A_1)]$, falls der Moderator Tür 3 öffnet. Wie oben gezeigt wurde ist das letztere mindestens so groß wie das erstere, so dass Wechseln niemals nachteilig ist; analoge Berechnungen führen zu demselben Resultat, wenn der Moderator Tür 2 öffnet.

4 Erweiterung

Sobald Schüler das Basis-Drei-Türen-Problem verstanden haben, können sie damit herausgefordert werden, ein Spiel mit mehr als drei Türen zu betrachten. Natürlich sind die Prinzipien dieselben, so dass bei n Türen die priori Wahrscheinlichkeiten $P(A_i) = 1/n$ für alle i sind. In diesem Spiel hat

	Auto hinter Tür 1	Auto hinter Tür 2	Auto hinter Tür 3	Auto hinter Tür 4	Randwahrscheinlichkeit
M. öffnet 1	0	0	0	0	0
M. öffnet 2	1/12	0	1/8	1/8	1/3
M. öffnet 3	1/12	1/8	0	1/8	1/3
M. öffnet 4	1/12	1/8	1/8	0	1/3
Randwahrscheinlichkeit.	1/4	1/4	1/4	1/4	1

Tab. 4:

dann der Moderator immer eine Wahl, welche Nieten er offenbaren will. Er mag das zufällig tun, eine oder mehrere Türen vorziegen oder seine Entscheidung von der anfänglichen Wahl des Kandidaten abhängig machen. Klar, dass das Problem damit komplexer wird. Tatsächlich kann dann die Wechselstrategie bei nicht-zufälliger Offenbarung der Nieten eine suboptimale Strategie sein!

Um die Sachlage zu vereinfachen nehmen wir an, dass Monty unter den verbleibenden Türen zufällig auswählt, obwohl er niemals das Auto und niemals die vom Kandidaten gewählte Tür zeigt. Und wie vorher nehmen wir an, dass der Kandidat anfänglich Tür 1 wählt. Dann ist die Matrix vom Typ (n,n) und die Hauptdiagonale besteht ebenso wie die erste Zeile - genau wie im drei-Türen-Spiel- aus lauter Nullen. Jede nicht-null Zelle in der ersten Spalte besteht aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit $1/[n(n-1)]$, während jede nicht-null Zelle in den anderen Spalten die Wahrscheinlichkeit $1/[n(n-2)]$ hat. Jede Spalte hat eine Randwahrscheinlichkeit von $1/n$. Die Randwahrscheinlichkeit der ersten Zeile ist Null, und die anderen Zeilen haben alle eine Randwahrscheinlichkeit von $1/(n-1)$. Hierbei ist, wie beim Fall des zufälligen Offenbarens im drei-Türen-Spiel, das Verhalten des Moderators unabhängig von einer korrekten Wahl des Kandidaten. Wählt der Kandidat beispielsweise Tür 1 und der Moderator offenbart eine Niete in Tür 3, dann ist $P(A_1|M_3) = P(A_1) = 1/n$ für jedes $n \geq 4$. Während Wechseln immer noch nützlich ist, kann die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Wechseln zu einer anderen Tür 1/2 nicht überschreiten. Genau genommen ist $P(A_i|M_j) = (n-1)/[n(n-2)]$ für alle $i \neq 1, i \neq j, j \neq 1$, was kleiner als 1/2 ist für $n \geq 4$ Türen. Bei diesem Spiel sind die Chancen für Monty immer größer!

Um dies zu illustrieren betrachten wir ein vier-Türen-Spiel mit zufälliger Offenbarung der Nieten. Die dazugehörige Matrix ist in Tabelle 4 wiedergegeben.

Jetzt nehmen wir an, dass Monty Tür 3 öffnet. Falls der Kandidat bei seiner ursprünglichen Wahl bleibt, ist die posteriori Gewinnwahrscheinlichkeit $P(A_1|M_3) = (1/12)/(1/3) = 1/4$. Wechselt der Kandidat z.B. zu Tür 4, verbessert sich die posteriori Gewinnwahrscheinlichkeit um 50% zu $P(A_4|M_3) = (1/8)/(1/3) = 3/8$. Klar, dass Wechseln sich immer noch lohnt. Aber wenn die Zahl der Türen steigt, verringert sich der Grenznutzen des Wechselns schnell.

5 Schlussfolgerung

Der bleibende Wert des Monty Hall Problems als didaktisches Instrument entstammt verschiedenen Eigenschaften. Trotz seines Bekanntheitsgrades unter Stochastikern ist es eher unwahrscheinlich, dass die gegenwärtige Schülergeneration das Rätsel schon vorher kennengelernt hat; nur wenige werden darüber gelesen haben und viele Stochastiklehrbücher erwähnen es überraschenderweise gar nicht. In einer Stichprobe von 104 Studierenden am College fand Friedman (1998) nur einen einzigen, der schon von dem Problem gehört hatte. Zum zweiten ist es wie jedes Spiel faszinierend und kann im Klassenzimmer leicht mit Hilfe symbolischer Preise nachgespielt werden. Drittens ist es nicht ein rein statistisches Problem; es ist auch ein Beispiel aus der Spieltheorie. Ohne weitere, zumindest implizite Annahmen über das Verhalten des Moderators ist das drei-Türen-Problem nicht lösbar. Daher ermuntert das Spiel Schülerinnen und Schüler, präzise über ihre Annahmen nachzudenken. Schließlich scheint es ein kontra-intuitives Problem zu sein, dessen offensichtliche Antwort korrekt oder falsch sein kann. Daher hilft es Schülerinnen und Schüler durch das Offenlegen des Kontra-Intuitiven, eine bessere Intuition zu entwickeln.

Literatur

Engel, E. und Ventoulias, A. (1991). Monty Hall's probability puzzle. *Chance*, **4**(2), 6-9.

Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition* **43**(3), 197-223.

Friedman, D. (1998). Monty Hall's three doors: construction and deconstruction of a choice anomaly. *American Economic Review*, **88** (4), 933-46.

Gardner, M. (1959). Mathematical Games. *Scientific American*, **201** (4), 174-81.

Gillman, L. (1992). The car and the goats. *American Mathematical Monthly*, **99**(1), 3-7

Gilovich, T., Medvec, V.H. und Chen, S. (1995). Commission, omission, and dissonance reduction: coping with regret in the Monty Hall problem. *Personality and Social Psychology Bulletin*, **21**(2), 182-90

Morgan, J.P., Chaganty, N.R., Dahiya, R.C. und Doviak, M.J. (1991). Let's make a deal: the player's dilemma. *American Statistician*, **45**(4), 284-7.

Nalebuff, B. (1987). Puzzles: choose a curtain, duelity, two point conversions, and more. *Journal of Economic Perspectives*, **1**(2), 157-63.

Selvin, S. (1975a). A problem in probability. *American Statistician*, **29**(1), 67.

Selvin, S. (1975b). On the Monty Hall problem. *American Statistician*, **29**(3), 134.

Shaugnessy, J.M. und Dick, T. (1991). Monty's dilemma: should you stick or switch? *Mathematics Teacher*, **84** (4), 252-6.

The Economist (1999). Getting the goat. 20. February, S. 72.

Tierney, J. (1991). Behind Monty Hall's doors: puzzle, debate, and answer? *New York Times*, 21. Juli, S.1

vos Savant, M. (1990a). Ask Marilyn. *Parade*, 9. September, S. 15

vos Savant, M. (1990b) Ask Marilyn. *Parade*, 2. Dezember, S. 25

vos Savant, M. (1991) Ask Marilyn. *Parade*, 17.Februar, S. 12

Anschrift des Verfassers
Joseph G. Eisenhauer
Canisius College
New York, USA

eisenhauer@canisius.edu

Anmerkungen des Übersetzers:
Zum drei-Türen-Problem gibt es auch in deutscher Sprache viele interessante Veröffentlichungen

Jahnke,Th. (1997): Drei Türen, zwei Ziegen und eine Frau. Ein didaktisches Lehrstück. *Mathematiklehren* (85), 47-51

Klemisch, I. (1993): Ein Einstieg in das Drei-Türen Problem. *Stochastik in der Schule* **13**(1), 8-14.

von Randow, G. (1992): *Das Ziegenproblem.* Rowohlt TB 1992

Beachtenswert sind auch folgende Internetadressen:

www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/koch/ziegen/node3.html

www.linux-magazin.de/ausgabe/1999/09/Monty/monty.html

www.jgiesen.de/Quiz/Ziegenproblem/Ziegen.html

www.amstat.org/publication/jse/v6n3/applets/LetsMakeaDeal.html

www.wiskit.com/marilyn/marilyn.html