Lernen über die Normalverteilung mit einem Graphikrechner

SUSAN JACKMAN, NAPIER UNIVERSITY, EDINBURGH/SCHOTTLAND

ÜBERSETZUNG: KARL RÖTTEL, EICHSTÄTT

Zusammenfassung:
Dieser Artikel beschreibt, wie ein Graphikrechner (Taschenrechner mit möglicher graphischer Darstellung) von Schüler und Studenten zum Thema Normalverteilung verwendet werden kann. Er behandelt auch die Probleme, die beim Ersetzen der statistischen Tafelwerke auftreten.

Einleitung

Viele Studenten besitzen heute graphische Taschenrechner und einige Prüfungsgremien, etwa International Baccalaureate und Scottish Qualifications Authority, gehen davon aus, daß die Kandidaten diese Rechner in den Prüfungen benutzen. An der Napier University, wie in Scott and Jackman (1999) beschrieben, erkannten wir Graphikrechner als sehr wertvoll zum Erlernen der beschreibenden Statistik. Ich möchte Lehrer und Dozenten ermutigen, das Ausmaß zu diskutieren, wie weit wir den Schülern und Studenten den Gebrauch von Rechnern für andere statistischen Inhalte, wie beispielsweise die Normalverteilung, erlauben sollten.

Hinweis des Übersetzers: Taschenrechner, Rechner und Graphikrechner benutzt die Verfassserin synonym.

Das Lösen einer traditionellen Aufgabe

Bislang wurde Schüler und Studenten beigebracht, die Wahrscheinlichkeiten für $\Phi(z)$, die (kumulative) Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, mittels Tafeln zu berechnen, die die Wahrscheinlichkeit dafür liefern, daß die standardisierte normalverteilte Zufallsvariable Z kleiner als z für positive z-Werte ist.

Anmerkung des Übersetzers: Für den Schulunterricht wird häufig der Fachbegriff „Verteilungsfunktion", der diese durch den Namen als die wesentliche Funktion charakterisiert, durch Begriffe wie „kumulierte/kumulative Verteilungsfunktion" ersetzt, in der Annahme, dadurch Anfängerschwierigkeiten zu begegnen.

An der Napier University lehren wir unsere Studenten Probleme in allerlei Anwendungszusammenhängen zu lösen; aber um hier die Darlegung einfach zu halten, möchte ich ein kontextfreies Beispiel verwenden und zuerst den traditionellen Weg der Lösung und dann Methoden, die einen Graphikrechner benutzen, beschreiben.

Beispiel 1

X ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert (Erwartungswert) 70 und der Standardabweichung 10. Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß X Werte zwischen 50 und 85 annimmt.

Die Lösung kann in drei Schritten gefunden werden:

1. Schritt:
Zuerst standardisiere man die Variable durch die Umrechnungen:

$$\frac{50-70}{10}=-2 \quad \text{und} \quad \frac{85-70}{10}=1{,}5\,.$$

Wir nutzen die Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeit, daß X zwischen 70 und 85 liegt, gleichbedeutend damit ist, daß Z zwischen –2 und 1,5 liegt. Wir schattieren die erhaltene Fläche in der Skizze einer standardisierten Normalverteilungskurve.

2. Schritt:
Man suche die Werte 1,5 und 2 in einer Tabelle für die Standardnormalverteilung, man liest die zugehörigen Werte 0,9332 und 0,97725 ab.

3. Schritt:
Man nutzt die Symmetrie der Kurve und die Tatsache, daß die Gesamtfläche unter der Kurve den Inhalt 1 besitzt, um die genaue Wahrscheinlichkeit herzuleiten. Diese ist
0,9332 - (1 – 0,97725) = 0,91045.

Lösen des Beispiels 1 unter Verwendung eines Graphikrechners:

Methode 1:

Ich würde die Studenten anhalten, mit der Standardisierung der Variablen wie bisher zu beginnen.
Auf einem TI-83 drücke man <2nd> und dann <VARS>, um das Menü DISTRIBUTION in folgender Form zu erhalten:

```
DISTR DRAW
1:normalpdf(
2:normalcdf(
3:invNorm(
4:tpdf(
5:tcdf(
```

```
6:x²pdf(
7↓x²cdf(
```

Nun drücke man 2, um **normalcdf(** auszuwählen. Jetzt gibt man –2, 1.5 ein und drücke <ENTER>.

Der Befehl und die errechnete Wahrscheinlichkeit sehen auf dem Display so aus:

```
normalcdf(-2, 1.5
       .9104427093
■
```

Man beachte, daß wir die kumulative Verteilungsfunktion **normalcdf** verwendeten. Die Standardfestlegungen sind 0 für den Mittelwert und 1 für die Standardabweichung.

Methode 2:

Wir stellen eine ausgefüllte Fläche, die der Wahrscheinlichkeit entspricht, in einem Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung dar und berechnen auch die Wahrscheinlichkeit. Weil die Wahrscheinlichkeit, daß Z kleiner als – 5 oder größer als 5 ist, ungefähr null beträgt, können wir – 5 für Xmin und 5 für Xmax verwenden, wenn wir im WINDOW-Menü die Variablenbelegung festlegen. Es ist üblich Ymin = - 0,2 zu setzen, um Platz für Text unter dem Graphen zu schaffen

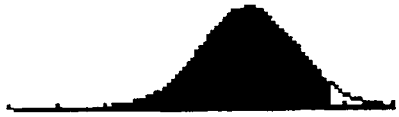
Das folgende Fenster ist deshalb zweckmäßig: (s. a. die restlichen Koordinaten):

```
WINDOW
Xmin=-5
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-.2
Ymax=.5
Yscl=.1
Xres=■
```

Drücke <2nd> <VARS>, um das Menü DISTRIBUTION zu erhalten. Drücke die Steuerungstaste ▸, um DRAW anzuwählen; dann drücke <ENTER>. Jetzt gib –2,1.5 ein, womit man diese Zeile bekommt:

```
ShadeNorm(-2,1.5
```

Drückt man jetzt <ENTER>, zeigt sich folgendes Display:



```
Area=.910443
low=-2       up=1.5
```

Der Vorteil der 2. Methode ist, daß alle Studenten die Fläche sehen, die sie berechnet haben.

Methode 3:

Es ist möglich, die gesamte Aufgabe einem Rechner auf folgende Weise zu übertragen:

```
normalcdf(50,85,
70,10)
      .9104427093
```

Dies ist eine „Blackbox"-Methode. Alles, was ein Student wissen muß, sind die zu verwendenden genauen Befehle und die korrekte Reihenfolge der Eingabe der Werte. Der Student gewinnt kein Verständnis der Normalverteilung. So stellt Iossif (1999) auch fest: „Wenn ein Rechner nur als Blackbox für Berechnungen benutzt wird, werden wir Studenten erhalten mit noch weniger Verständnis der behandelten Begriffe als zuvor. In einer Prüfung würden dann auch sehr wenig Punkte für diese Art richtiger Antworten vergeben werden.

Beispiel 2

Berechne für eine standardisierte Normalvariable Z unter Verwendung des Graphikrechners die Wahrscheinlichkeit, daß Z kleiner als 1,2 ist.

Weil bei dieser Aufgabe keine untere Grenze gegeben ist, erfinden wir eine. Wie in Methode 2 oben beschrieben wurde, können wir für eine standardisierte Normalvariable –5 als untere Grenze nehmen, so daß wir **normalcdf(**-5, 1.2) erhalten.

In gleicher Weise können wir, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß Z größer als 1,2 ist, **normalcdf(**1.2, 5) verwenden.

Beispiel 3

Wenn X einer Normalverteilung mit dem Mittelwert 70 und der Standardabweichung 10 folgt, bestimme man den Wert w, für welchen 95 % der Werte von X kleiner als w sind. Studenten finden diese Art von Aufgaben oft schwierig, aber ein Rechner beseitigt die Probleme.

Wir wählen wieder einen Befehl aus dem Menü DISTRIBUTION. Befehl (Nr.3), Eintrag und Antwort nach dem <ENTER> sehen dann so aus:

```
invNorm(.95,70,1
■
      86.44853626
```

Diese „Blackbox"-Methode erlaubt den Studenten, die richtige Antwort zu finden. Es ist nutzbringender, den Sachverhalt mit einem Diagramm in folgender Weise zu veranschaulichen:

Wähle WINDOW und dann einen ShadeNorm-Befehl (in DISTR den Rechts-Cursor und dann 1 drücken) wie in Methode 2 oben.

```
WINDOW
Xmin=20
Xmax=100
Xscl=10
Ymin=-.05
Ymax=.05
Yscl=.1
Xres=1

ShadeNorm(0,86.4
4853626,70,10)
```

Die Studenten können dann (nach Drücken von ENTER) die schattierte Fläche links von 86,4485 sehen.

```
Area=.95
low=0          up=86.4485
```

Diskussion der Begleiterscheinungen bei Verwendung des Rechners

Sollen wir die Studenten dazu ermutigen, Rechner statt Tafelwerke zu verwenden? Die Situation ist ähnlich der beim Ermitteln von Wurzelwerten. In der Vergangenheit benutzten die Schüler und Studenten Tafelwerke dafür. Um die Wurzel aus 317 zu berechnen, sahen sie in den Tafeln bei 3,97 nach und multiplizierten die erhaltene Antwort mit 10. Um die Wurzel aus 740000 zu bestimmen, sahen sie bei 74 in den Tafeln nach und multiplizierten die Antwort mit 100. Heute verwenden alle Schüler und Studenten Rechner für Wurzeln.

Es ist überdenkenswert, ob Tafeln den Lernenden helfen, die Normalverteilung zu verstehen. Ich jedoch glaube, daß es hilfreich ist, Wahrscheinlichkeiten mit Flächen unter der Normalverteilungskurve in Verbindung zu bringen. Die Verwendung eines Graphikrechners, wie in Methode 2 beschrieben, ist deshalb vorteilhaft.

Wenn von Studenten in einer externen Prüfung verlangt wird, statistische Tabellen zu benutzen, ist es klar, daß ihnen gelehrt werden muß, sie zu verwenden. Deshalb können Rechner Tafeln in unserem Unterricht auch nicht ersetzen. Kissane et al. (1996) haben empfohlen, daß wir die Studenten nicht überladen sollten, indem wir von ihnen fordern, zusätzlich zum Lernen einer traditionellen Methode das Bedienen von Apparaten zu erlernen.

Wir müssen überlegen, ob der Gebrauch von Graphikrechnern wirklich eine Last für die Studenten ist oder ob wir sie nutzen können, um das Lernen der Studenten zu fördern.

Wenn wir beim Benutzen von Rechnern Zeit sparen, können wir neue Aktivitäten anbieten wie etwa eine Einführung in die Verteilung des Stichprobenmittelwertes. Unten werde ich ein Experiment beschreiben, das Lernende durchführen können, wenn Sie einen Viewscreen auf einem Overheadprojektor benutzen. Damit wird veranschaulicht, daß die Stichprobenmittelwerte weniger extreme Werte annehmen als innerhalb der Gesamtpopulation auftreten, und das Konzept von Mittelwert und Standardabweichung von Stichprobenmittelwerten eingeführt. Wenn Sie die Ergebnisse mit Studenten diskutiert haben, können diese den Vorgang auf ihren eigenen Rechnern wiederholen. Graham (1997) hat ein schönes Programm vorgelegt, den Zentralen Grenzwertsatz durch Verwendung einer gleichförmigen Verteilung einzuführen. Sie können, wenn Sie wollen, ein ähnliches Programm in diese Demonstration einbauen.

Beispiel 4

Man simuliere 5 Stichproben bestehend aus je 36 Punkten einer Normal-Population, deren Mittelwert 100 und deren Standardabweichung 6 betragen. Berechne die Mittelwerte der Stichproben.

Um eine Stichprobe aus einer Normalverteilung zu gewinnen, drücke zuerst <MATH>, benutze dann (dreimal) den Rechts-Cursor (▸), um PRB zu aktivieren, und drücke nun 6, um **randNorm** auf den Bildschirm zu bringen.

Gib jetzt 100,6,36 (für den Mittelwert 100, die Standardabweichung 6 und die Stichprobengröße 36) ein. Nun drücke <STO->> <2nd> <1>, um die

Stichprobe in Liste L_1 zu speichern. Man erhält auf der Bildfläche:

```
randNorm(100,6,3
6)->L1
```

Wiederhole den **randNorm**-Befehl weitere 4-mal (Cursor | benutzen)und speichere nacheinander in L_2, L_3, L_4 und L_5 eine Stichprobe. Man sollte nun 5 Stichproben einer Normalverteilung, jede aus 36 Punkten, haben. Zur Berechnung der Mittelwerte drücke man <2nd> <STAT>, um ins LIST-Menü zu gelangen, betätige dann den Rechts-Cursor (zweimal), um MATH zu aktivieren, drücke jetzt 3, um „mean" zu erhalten, und vervollständige so:

```
mean(L1)->L6(1)
```

Man wiederhole dies für die anderen Stichproben, wobei Sie deren Mittelwerte nach $L_6(2)$, $L_6(3)$ usw. speichern.

Jetzt drücken Sie <STAT> und (als Nr.1) EDIT und fordern die Studenten auf, die Werte in den Listen anzusehen.

Hinweis:
L_1 erhält man durch <2nd> <1>
-> erhält man durch <STO->□>

Es sollte klar sein, daß die Variation innerhalb der Stichprobenmittelwerte viel kleiner ist als die Variation innerhalb jeder Stichprobe.
Sie können „1-Var Stats L_6" verwenden, um den Mittelwert und die Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte zu berechnen. Als ich diese Aufgabe durcharbeitete, erhielt ich den Mittelwert von L_6 zu 99,6 und die Standardabweichung von L_6 zu 0,7.

Die Werte sind natürlich bei jeder Demonstration unterschiedlich, aber der Mittelwert der Stichprobenmittelwerte wird in der Nähe von 100 und die Standardabweichung bei etwa 10 liegen. Dies deshalb, weil die Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes $\sigma/\sqrt{n}$ ist, wobei σ die Standardabweichung der Population und n die Stichprobengröße sind.

Bemerkung:
Es ist möglich, eigene, benutzerdefinierte benannte Listen zu erzeugen, in die man mehr Stichproben speichern kann. Aber dies dürfte die Studenten verwirren und von der Demonstration ablenken. Wenn die Studenten das Erzeugen und Speichern von Stichproben beherrschen, können sie das Verfahren mit unterschiedlichen Stichprobengrößen wiederholen und ihre Ergebnisse vergleichen.

Die oben beschriebene Betätigung könnte zu vielerlei anderen Themen einschließlich den Konfidenzintervallen führen.

Literatur:

Graham, A.T. (1997): Hey what's the big idea? Teaching Statisties, 19(1), 8-11.

Iossif, G. (1999): The graphics calculator as a teaching aid in statistics. Teaching Statistics, 21(2), 45-8.

Kissane, B., Kemp, M. and Bradley, J. (1996): Graphies calculators and assessment. In: P. Gomez and B. Walts (eds), Roles of Calculators in the Classroom. http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/tg18/Kissane/Kissane-1.html

Scott, T. and Jackman, S. (1999): Examples of the use of technology in teaching statistics. Teaching Statistics, 21(1), 20-3.

Stein, G.: Anmerkungen zur Behandlung der Normalverteilung im Mathematikunterricht. In: Stochastik in der Schule (1992) v. 12(1) S. 38-41

Käse, K.H. Schulsoftware: Stochastik. Kaese (K.H.) Schulsoftware (KHK), Uetersen (Germany, F.R.

Wendt, P.: Stochastik. Lehr- und Uebungsbuch. Bonn: Dümmler. 1991. 124 S.

Originalartikel: Learning About the Normal Distribution With a Graphics Calculator. In Teaching Statistics v.23(2001)1, S. 13-16

Autor: Susan Jackman, Napier University, Edinburgh, Scotland
e-mail: s.jackman@napier.ac.uk