# Lewis Carroll's Problem des stumpfwinkligen Dreiecks

RUMA FALK; ESTER SAMUEL-CAHN; Jerusalem

Übersetzung und Bearbeitung: HANS-DIETER SILL, Rostock

***Zusammenfassung:***

*Es wird gezeigt, dass CARROLL's scheinbar richtige Lösung eines seiner Wahrscheinlichkeitsprobleme die Lösung eines anderen Problem ist, das auf sinnvollen Annahmen beruht. Die ursprünglichen Annahmen sind in sich widersprüchlich und führen zu paradoxen Ergebnissen.*

## Einleitung

Lewis Carroll (1832 – 1898) litt an Schlafproblemen. Obwohl dies sicher eine unangenehme Sache war, hatte es einen erfreulichen Nebeneffekt: die schlaflosen Nächte führten zu einer Sammlung von Problemen mit dem Titel: „Kopfkissenprobleme – erdacht in schlaflosen Stunden". Die Bürde der Schlaflosigkeit überträgt sich nun auf den Leser des reizvollen Buches (CARROLL 1958, erstmals veröffentlicht 1895).

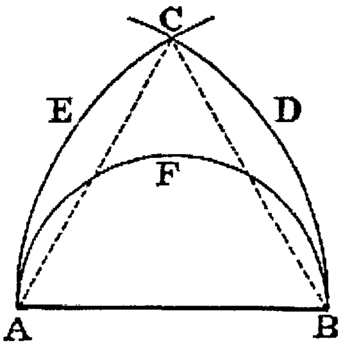
Insbesondere stört eines der Probleme unseren Schlaf. In diesem Problem (Nr. 58) wird gefragt:

> *Drei Punkte einer unendlichen Ebene werden zufällig ausgewählt. Finde die Wahrscheinlichkeit, dass die Punkte die Eckpunkte eines stumpfwinkligen Dreiecks sind.* (CARROLL 1958, S. 14)

## Eine problematische Aufgabenstellung

Das störende Element in der Formulierung des Problems ist die *zufällige Auswahl* von Punkten in einer *unendlichen Ebene*. Das ist ein praktisch und konzeptionell unmögliches Verfahren. Die beiden Voraussetzung von CARROLL, dass (1) der Stichprobenraum seines Experimentes unendlich und (2) die Verteilung gleichmäßig ist sind einander widersprechende Annahmen. Sie führen früher oder später zu paradoxen Ergebnissen (s. FALK; KONOLD 1992)

Dennoch scheint CARROLL's Lösung des Problems des stumpfwinkligen Dreiecks fehlerlos zu sein. WELLS (1992, S., 248-249) gab z.B. diese Lösung ohne weitere Einwände an:

> *Es kann vorausgesetzt werden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die 3 Punkte auf einer Geraden liegen, praktisch Null ist. Es wird die längste Seite des Dreiecks ausgewählt und mit AB bezeichnet.*
>
> 
> 
>
> *Auf der Seite von AB, auf der das Dreieck liegt, wird der Halbkreis AFB gezeichnet. Um die Punkte A und B werden dann die Kreisbögen BDC und AEC und mit dem Radius AB gezeichnet, die sich im Punkt C schneiden. Es ist dann klar, dass der Eckpunkt des Dreiecks nicht außerhalb der Figur ABDCE liegen kann. Liegt er weiterhin im Innern des Halbkreises, ist das Dreieck stumpfwinklig, liegt er außerhalb, ist es spitzwinklig. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt auf den Rand des Halbkreises liegt, ist praktisch Null.*
>
> *Deshalb ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit =*
> $$\frac{\textit{Flächeninhalt des Halbkreises}}{\textit{Flächeninhalt der Figur ABDCE}}$$
>
> *Ist AB = 2a, so beträgt der Flächeninhalt des Halbkreises* $\frac{1}{2}\pi a^2$ *und der Flächeninhalt der Figur ABDCE = 2 x Sektor ABDC – Dreieck ABC*
> $$= 2\cdot\frac{4\pi\pi^2}{6} - \sqrt{3}\cdot a^2 = a^2\cdot\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$
>
> *Also ist die Wahrscheinlichkeit*
> $$= \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}} = \frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}}$$ (CARROLL 1958, S. 83)

Die Rechnung ergibt als Wert für die Wahrscheinlichkeit 0,6394.

Ein genauerer Blick auf CARROLL's Lösung zeigt, dass er in der Tat die Gleichmäßigkeit verwendet hat. Er setze jedoch nur voraus, dass dies für das Innere der Fläche gilt, die durch die Figur ABDCE begrenzt wird. Der berechnete Wert von etwa 0,64 ist die richtige Antwort auf eine andere Frage. Das korrekte Problem für CARROLL's Lösung lautet:

> *Es seien zwei beliebige Punkte A und B gegeben. Es wird ein Dreieck konstruiert, indem ein dritter Punkt zufällig aus dem Gebiet ausgewählt wird, für das AB die längste Seite des Dreiecks ist. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck stumpfwinklig ist?*

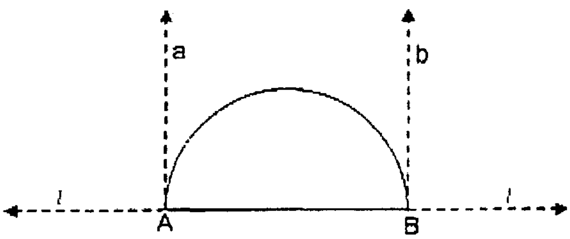
Der Fehler in der ursprünglichen Formulierung des Problems, bei dem drei Punkte zufällig in einer unendlichen Ebene gewählt werden sollen, liegt darin, dass die Existenz eines so gebildeten Dreiecks als selbstverständlich angenommen wird. Dieser Ausgangspunkt ist zunächst nicht einmal fragwürdig. Die Widersprüchlichkeit der Grundannahme kann aber durch eine nachträgliche Analyse und numerische Berechnungen offensichtlich gemacht werden.

## Herleitung eines Widerspruchs

Die Fehlerhaftigkeit der Voraussetzungen von CARROLL wird besonders deutlich, wenn verschiedene Lösungen derselben Aufgabe aus den gleichen Annahmen abgeleitet werden können.

CARROLL folgend setzen wir nun voraus, dass jene besagten drei Punkte ausgewählt wurden und ein Dreieck bilden. Es sei AB eine Seite des Dreiecks. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nur die obere Seite der Ebene (oberhalb der Geraden *l*) als Stichprobenraum für die zufällige Auswahl des dritten Punktes betrachten.

Durch die Wahl des dritten Punktes wird ein stumpfwinkliges Dreieck gebildet, wenn entweder der Winkel ACB oder der Winkel CAB oder der Winkel CBA stumpfwinklig sind. Diese drei Ereignisse schließen sich paarweise gegenseitig aus, so dass wir nur ihre einzelnen Wahrscheinlichkeiten addieren müssen um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu finden. Wir halten weiter an der Voraussetzung der Gleichmäßigkeit bezüglich der unendliche Ebene fest. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Winkel ACB stumpf ist, kann vernachlässigt werden, da dies dann der Fall ist, wenn der Punkt im Innern des Halbkreises über AB liegt und die Fläche des Halbkreises ist vernachlässigbar klein bezüglich der unendlichen Fläche des Stichprobenraumes. Es ist jedenfalls $P(\angle CAB > 90°) = \frac{1}{2}$, weil $\angle CAB$ stumpf ist, wenn C links von der Linie a liegt. Genauso kann man zeigen, dass $P(\angle CBA > 90°) = \frac{1}{2}$, weil dies die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Punkt C auf der rechten Seite der Linie b liegt.




Als Ergebnis ergibt sich P(stumpfwinkliges Dreieck) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ im Gegensatz zu obigen Resultat von 0,64.

Ergänzend ist festzustellen, dass die Ermittlung des Ergebnisse $p = 1$ unsinnig erscheinen mag. Dies ist aber eine Konsequenz aus den unsinnigen Annahmen. Zweifellos können noch viele weitere widersprüchliche Folgerungen aus der vorausgesetzten zufälligen Auswahl eines Punktes aus einem unbegrenzten Gebiet gezogen werden. Beispielsweise wies der Gutachter dieses Artikels daraufhin, dass infolge der Symmetrie aus $P(\angle CAB > 90°) = \frac{1}{2}$ folgt, dass dies auch für die anderen zwei Winkel gelten muss und damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit 1,5 betragen würde.

Die Ableitung verschiedenen Lösungen aus demselben Wahrscheinlichkeitsproblem erinnert an das BERTRANDsche Paradoxon (SZÉKELY, 1986, S. 46). Dort wurden verschiedene Wahrscheinlichkeiten bezüglich eine Frage zur zufälligen Auswahl eine Sehne in einem gegebenen Kreis gefunden, indem man verschiedene Methoden zur Auswahl der Sehne anwendete. BERTAND's Forderung der zufälligen Auswahl einer Sehne, wobei die Wahrscheinlichkeit der Auswahl für alle Sehen gleich sein soll, bestimmt kein eindeutiges Verfahren, sondern kann auf verschiedene Weisen durchgeführt werden. Jede dieser Auswahlmethoden ist genau definierbar und führt zu verschiedenen Lösungen des Sehnenproblems.

Im Unterschied dazu ergeben sich im Problem von CARROLL die oben gewonnenen unterschiedlichen Resultate aus der Vorschrift einer zufälligen Auswahl von drei Punkten in einer Ebene. Obwohl dies durchaus durchführbar erscheint, ist es doch unmöglich zu erfüllen.

## Lösungsversuche

Wie könnte man nun die Wahrscheinlichkeit für die zufällige Wahl eines stumpfwinkligen Dreiecks ermitteln? Wie betrachten anstelle einer unendlichen Ebene eine gleichmäßige Verteilung auf einem sehr großen Quadrat mit der Seitenlänge n. Eine einfache Überlegung zeigt, dass die Lösung nicht von der Größe der Fläche abhängen kann, sondern nur von ihrer Form, d.h. in Fall des Quadrates kann n = 1 gewählt werden. Die Seitenlänge des Quadrates kann beliebig groß werden, ohne dass sich die Wahrscheinlichkeit ändert. Dies kommt wahrscheinlich CARROLL's Intensionen am nächsten.

Eine analytische Lösung ist sehr schwer zu gewinnen. Es ist einfacher, eine Computersimulation durchzuführen. Der Computer wähle zufällig aus dem Intervall [0; 1] Werte der Zufallsgrößen $X_1$, $X_2$, $X_3$, $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ aus, die dann voneinander unabhängig und gleichmäßig über [0; 1] verteilt sind. Mit ihnen werden die drei Punkte $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$ und $(X_3,Y_3)$ erzeugt. Diese sind dann zufällig ausgewählte Punkte des Einheitsquadrates. Es seien $L_1$, $L_2$ und $L_3$ die Längen der drei Seiten, des durch die Punkte gebildeten Dreiecks. Es sei

$$Z = \begin{cases} 1 \text{ wenn } L_1^2 + L_2^2 \le L_3^2 \text{ oder } L_1^2 + L_3^2 \le L_2^2 \text{ oder } L_2^2 + L_3^2 \le L_1^2 \\ 0 \text{ ansonsten} \end{cases}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass Z = 1 genau dann gilt, wenn das Dreieck stumpfwinklig ist.

Wir führten $10^6$ Simulationen durch. Der Anteil der dabei erhaltenen stumpfwinkligen Dreiecke betrug 0,7249 mit einem Standardfehler von 0,00045. Der ermittelte Wert ist also etwas größer als der Wert 0,6394 von CARROLL.

Wir führten weiterhin ähnliche Simulationen (jeweils $10^6$ mal) mit verschiedenen anderen geometrische Figuren durch, wie z.B. Kreis, gleichseitiges Dreieck und Rechteck, dessen Seitenlängen im Verhältnis 1 : k stehen, wobei k von 2 in Schritten zu 3 bis 20 lief. Wenn man die Größe die Flächen hinreichend ausdehnt. überdecken sie jedes gegeben Dreieck in einer Ebene.

Die Tabelle 1 fasst die gefundenen Ergebnisse zusammen. Man sieht, dass die Form der betrachteten Fläche die Größe der (geschätzten) Wahrscheinlichkeit, ein stumpfwinkliger Dreieck zu erhalten in hohem Maße beeinflusst. Für Rechtecke mit einem Seitenverhältnis von 1 : 20 ist die Wahrscheinlichkeit praktisch 1. In alle Fällen ist die Wahrscheinlichkeit größer als CARROLL's Lösung.

| Fläche | Wahrscheinlichkeitsschätzung | Standardfehler |
|---|---|---|
| Quadrat | 0,7249 | 0,00045 |
| Kreis | 0,7201 | 0,00045 |
| gleichseitiges Dreieck | 0,7484 | 0,00043 |
| Rechteck 1 : k | | |
| k = 2 | 0,7987 | 0,00040 |
| k = 5 | 0,9324 | 0,00025 |
| k = 8 | 0,9660 | 0,00018 |
| k = 11 | 0,9795 | 0,00014 |
| k = 14 | 0,9861 | 0,00012 |
| k = 17 | 0,9899 | 0,00010 |
| k = 20 | 0,9924 | 0,00009 |

**Tabelle 1**

## Schlussfolgerungen

Die didaktische Konsequenz aus dieser Klasse von Problemen zur geometrischen Wahrscheinlichkeit sehen wir in einer erhöhten Aufmerksamkeit bei der Untersuchung der Voraussetzungen stochastischer Probleme. Mehrdeutige oder nicht ausgewiesene Bedingungen des Problems, auf die sich der Löser oft unbewusst stützt, haben schon oft zu Schwierigkeiten und widersprüchlichen Schlussfolgerung in stochastischen Überlegungen geführt. Im Fall von CARROLL's Kopfkissenproblem Nr. 58 sind die Voraussetzungen nicht einmal implizit gegeben, sondern werden zu Beginn offen genannt. Man sollte trotzdem nicht versäumen, wie der Autor und wahrscheinlich viele Leser diese Bedingungen auf ihre Haltbarkeit zu untersuchen.

### Schlussbemerkungen

Nach Abschluss der Simulationen wies uns Dr. Uwe Saint-Mont Dankbarerweise auf die Existenz analytischer Lösungen der Probleme hin. Der Fall der zufälligen Auswahl von Punkten eines Rechtecks mit verschiedenen Seitenverhältnissen wurde durch E. Langford in dem Artikel „The probability that a random triangle is obtuse“ in Biometrika 56 (1969) S. 689-690 analysiert. Den Fall der zufälligen Auswahl von Punkten eines Kreises untersuchte G. R. Hall in dem Artikel „Acute triangles in the n-ball“ in Journal of Applied Probability 19 (1982) 712-715. Unsere Simulationsergebnisse unterscheiden sich nur sehr wenig von den analytischen Ergebnissen, sie stimmen bis zu 3. Dezimale überein. Obwohl die analytischen Lösungen eine Simulation zu erübrigen scheinen, liegt der Wert der Simulation in der Veranschaulichungen der Durchführbarkeit des Zufallsexperimentes der zufälligen Auswahl von Punkten aus einem begrenzten Gebiet im

Unterschied zur Unmöglichkeit der CARROLL'schen Vorgehensweise.

## Literatur

Carroll, L.: Pillow Problems and a Tangled Tale. New York: Dover, 1985

Falk, R. ; Konold, C.: The psychology of learning probability. In: Gordon, F.S.; Gordon, S. P. (eds): Statistics for the Twenty-First Century, pp. 151 – 164. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1992

Székely, G. J. ; Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics. Dordrecht: Reidel, 1986

Wells, D.: The Penguin Book of Curios and Interesting Puzzles. Hermondsworth: Penguin Books, 1992