Author: Krauss, Stefan
Date:2003
Title: Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das "Häufigkeitskonzept"
Journal: Stochastik in der Schule
Volume: 23
Issue: 1
Pages: 2-9

Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das „Häufigkeitskonzept”

STEFAN KRAUSS, MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR BILDUNGSFORSCHUNG

Zusammenfassung: *Die Geschichte der Mathematik hält zahlreiche Anekdoten bereit, in denen sich Mathematiker durch scheinbar einfache Wahrscheinlichkeitsaufgaben in die Irre führen ließen. Mittlerweile sind in der Stochastik eine Fülle von Aufgaben bekannt, deren Ergebnisse sich besonders hartnäckig der menschlichen Intuition widersetzen. Psychologen untersuchen Aufgaben dieser Art im Rahmen der Forschung zu "kognitiven Täuschungen". Eine kognitive Täuschung liegt vor, wenn die menschliche Intuition stark und systematisch von einem normativ korrekten Ergebnis abweicht. Solche Täuschungen sind besonders im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten und des Satzes von Bayes bekannt. Die aktuelle kognitionspsychologische Forschung hat nun einen Weg gefunden, wie man die beim Satz von Bayes oftmals auftauchenden Widersprüche zwischen Intuition und richtiger Lösung „reparieren" und so zu einem echten Verständnis des Konzepts der bedingten Wahrscheinlichkeiten gelangen kann. Dieses Verfahren findet derzeit bereits in der Medizin und in der Rechtsprechung – wo oftmals unter Unsicherheit „Bayesianische" Entscheidungen getroffen werden müssen – viel Aufmerksamkeit. Der vorliegende Beitrag stellt dieses Verfahren vor und zeigt, welche Bedeutung es auch für die Didaktik der Stochastik haben kann. Der Ideen des Aufsatzes erschienen bereits in „PM“ (Wassner, Krauss, Martignon, 2002) und im Tagungsband des AK Stochastik (Krauss, 2001).*

Die Geburt der Wahrscheinlichkeitstheorie wird gewöhnlich auf einen Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat aus dem Jahre 1654 datiert. Die beiden Mathematiker beschäftigten sich mit zwei Problemen, die der Chevalier de Méré zur Diskussion gestellt hatte. Obwohl beide die Probleme lösten, war de Méré unzufrieden mit den Lösungen; aber nicht deshalb, weil sie zu anspruchsvolle Mathematik beinhalteten, sondern einfach, weil sie seiner Intuition widersprachen (siehe z.B. Barth & Haller, 1996, S. 72). Aufgaben, deren richtige Lösungen sich dem gesunden Menschenverstand entgegenzusetzen schienen, wurden in der Folgezeit *Paradoxa* genannt (siehe z.B. Falk, 1992, S. 210; einen umfassenden Überblick über den Begriff des „probabilistischen Paradox” gibt Winter, 1992). Abraham de Moivré, ebenfalls einer der Erfinder der Wahrscheinlichkeitsrechnung, fasst die anfänglichen Schwierigkeiten bei der mathematischen Zähmung des Zufalls zusammen: „Manche Probleme, die der Zufall aufwirft, erscheinen uns zunächst sehr einfach; man glaubt, sie wären mit etwas gesundem Menschenverstand recht bald zu lösen. Aber das erweist sich leider allzu oft als falsch, und die Fehler, die wir so begehen, sind nicht selten.” (in Krämer, 1995, S. 159).

Doch schon ein Jahrhundert später – zur Zeiten der Aufklärung – glaubten die Mathematiker und Philosophen, dass diese Anfangsschwierigkeiten behoben seien. Sie kamen zur Überzeugung, dass die *mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung* und das *menschliche Wahrscheinlichkeitsdenken* nur zwei 0Laplace z.B. identifizierte das menschliche Denken nicht etwa als Opfer, sondern geradezu als „Killer” probabilistischer Paradoxa. In seinem „Philosophischen Versuch über die Wahrscheinlichkeit” (1932, S. 123; original 1814) schrieb er: „Der Verstand ist ebenso Täuschungen ausgesetzt wie der Gesichtssinn, und wie der Tastsinn die Täuschungen des letzteren berichtigt, ebenso berichtigen das Denken und die Rechnung die Täuschungen des ersteren”. Überlegungen dieser Art ließen ihn sogar folgenden Zusammenhang zwischen menschlichen Denkvorgängen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung vermuten: „Wahrscheinlichkeitstheorie ist im Grunde nichts anderes als gesunder Menschenverstand, zusammengefasst in einem Kalkül.” (siehe z.B. Gigerenzer & Hoffrage, 1995, S. 684). Jacob Bernoulli brachte um 1736 eine ähnliche Haltung in einem Brief an Wilhelm Gottfried Leibniz zum Ausdruck, in dem er über ein wichtiges Gesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung philosophierte: „Das Gesetz der großen Zahlen ist eine Regel, die selbst der dümmste Mensch per se aus einer Art Naturinstinkt heraus weiß, und nicht aus einer vorausgegangenen Erklärung.” (Für eine ausführliche Diskussion dieser Aussage siehe Sedlmeier & Gigerenzer, 2000).

Obwohl die Betrachtung probabilistischer Paradoxa bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts Mathematikern vorbehalten war, kristallisierten sich bereits deutlich genuin *psychologische* Fragestellungen heraus: Es ging um „Intuition”, um „Naturinstinkt” und um „gesunden Menschenverstand”. Als Mitte des 19. Jahrhunderts die empirische Erforschung des menschlichen Denkens von Seiten der Psychologen einsetzte, war man anfangs weiterhin davon überzeugt, dass die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Logik[1] auch die Gesetze des menschlichen Denkens sind. Bezüglich der Logik z.B. kamen Bärbel Inhelder und Jean Piaget noch 1956 zu dem Ergebnis, dass „schließendes Denken nichts anderes als die mathematische Logik selbst" ist. Doch diese empirische Fortsetzung einer aufgeklärten Auffassung der menschlichen Urteilsfähigkeit währte nur kurz.

Die folgende Kehrtwende wurde insbesondere durch das Werk von Daniel Kahneman und Amos Tversky eingeleitet. In ihrem Buch „Judgement under uncertainty. Heuristics and biases" (1982) stellten die beiden Psychologen eine Fülle von Aufgaben – meist probabilistischer oder logischer Natur – vor, bei denen das menschliche Urteil systematisch von der richtigen Lösung abweicht. Kahneman und Tversky formulierten ihr Forschungscredo bereits 1973: „Wenn Menschen Voraussagen und Urteile unter Unsicherheit treffen, scheinen sie nicht den Kalkülen der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder statistischen Theorien der Vorhersage zu folgen. Stattdessen verlassen sie sich auf eine begrenzte Menge von Heuristiken, die manchmal befriedigende Urteile hervorbringen, manchmal aber zu schweren und systematischen Fehlern führen." In den folgenden Jahrzehnten dominierte diese Überzeugung die Forschung zum „Urteilen unter Unsicherheit". Der italienische Physiker Massimo Piattelli-Palmarini, der sich ebenfalls der Untersuchung kognitiver Täuschungen zugewandt hatte, bekräftigte 1991: „Wir sind eine Spezies, die offensichtlich wahrscheinlichkeitsblind ist, und zwar vom einfachen Hausmeister bis zum Chefchirurgen ... Wir sollten nicht abwarten, bis Tversky und Kahneman den Nobelpreis erhalten[2], sondern endlich mit unserer Befreiung von diesen kognitiven Illusionen beginnen." Und Stephen J. Gould schreibt 1992: „Tversky und Kahneman argumentieren – korrekterweise, wie ich denke –, dass unser Verstand (aus welchem Grund auch immer) nicht dafür gebaut ist, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu arbeiten."

Doch auch damit war das letzte Wort noch nicht gesprochen. Die neuerliche Kehrtwende, die den Menschen und seine Fähigkeit, unsichere Information zu verarbeiten, wieder in ein besseres Licht rückte, geschah erst vor wenigen Jahren. Die Psychologen Gerd Gigerenzer und Ulrich Hoffrage (1995) warfen einen genaueren Blick auf die von Tversky und Kahneman verwendeten Aufgaben zum Umgang mit Unsicherheit. Eine der Aufgaben, die z.B. untersuchen sollte, ob Menschen von Natur aus „Bayesianer" sind, ist die folgende (Eddy, 1982):

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine symptomfreie Frau einer gewissen Altersgruppe Brustkrebs hat, beträgt 1%. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Krankheit mit einer Mammografie erkannt wird, ist laut Literatur 80%. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Krankheit mit einer Mammografie irrtümlich diagnostiziert wird, obwohl sie gar nicht vorliegt, ist 9,6%. Wenn nun eine symptomfreie Frau dieser Altersgruppe bei einer Routineuntersuchung einen positiven Mammografiebefund erhält, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass bei ihr tatsächlich Brustkrebs vorliegt?

Bezeichnen wir das Ereignis „Brustkrebs" mit B und einen positiven Mammografiebefund mit M_+, ergibt sich die richtige Antwort mit Hilfe des Satzes von Bayes wie folgt:

$$P(B\,|\,M_+) = \frac{P(B)\cdot P(M_+\,|\,B)}{P(B)\cdot P(M_+\,|\,B) + P(\overline{B})\cdot P(M_+\,|\,\overline{B})}$$
$$= \frac{0{,}01\cdot 0{,}8}{0{,}01\cdot 0{,}8 + 0{,}99\cdot 0{,}096} \approx 7{,}8\%$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also nur ca. 7,8%, dass diese Frau tatsächlich Brustkrebs hat. Eddy berichtet, dass 95 von 100 Ärzten, denen er diese Aufgabe stellte, große Probleme hatten: Die Schätzwerte dieser 95 Ärzte lagen zwischen 70% und 80% statt bei 7,8%. Auch in der Didaktik der Mathematik ist die Einschätzung eines Krankheitsrisikos nach einem medizinischen Testergebnis eine beliebte Aufgabe zur Illustration von Verständnisproblemen beim Satz von Bayes (bei Strick, 2000, soll z.B. ebenfalls Brustkrebs aufgrund eines Mammografieergebnisses diagnostiziert werden).

Gigerenzer und Hoffrage (1995) stellten fest, dass die kommunizierte Unsicherheit – wie auch in allen anderen verwendeten Aufgaben dieses Forschungsprogramms – in Prozentwerten oder in Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt war, also so, wie wir es auch aus üblichen Stochastiklehrbüchern kennen. Sie fragten: Kann man aus dem menschlichen Unvermögen, solche Wahrscheinlichkeitsaufgaben zu lösen, schließen, dass Menschen grundsätzlich keine mentalen Algorithmen für das Urteilen unter Unsicherheit haben? Gigerenzer und Hoffrage gaben zu bedenken, dass die Frage nach der Qualität eines mentalen Algorithmus nicht von der Art und Weise der Repräsentation der Informationen getrennt werden kann: Algorithmen verarbeiten Information, und

[1] Untersucht wurde vor allem die Aussagenlogik, die als eine Einschränkung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Werte 0 und 1 angesehen werden kann.

[2] Dies ist mittlerweile tatsächlich geschehen: Daniel Kahneman erhielt im Oktober 2002 den Nobelpreis für Ökonomie für seine Forschungen zum menschlichen Entscheidungsverhalten.

Information braucht Repräsentation. Folgendes Beispiel kann diesen Gedankengang illustrieren:

Ein Taschenrechner ist eingestellt auf Zahlen im Dezimalsystem. Würde man ihm Zahlen im Dualsystem eingeben, würde er nur unsinnige Ergebnisse liefern. Daraus kann man aber noch lange nicht schließen, dass der Taschenrechner keinen Algorithmus zum Addieren hat. Gibt man dem Taschenrechner das richtige *Repräsentationsformat* ein, nämlich Zahlen im Dezimalsystem, ist er zu erstaunlichen Leistungen fähig.

Gibt es ein Repräsentationsformat für Unsicherheit, auf das das menschliche Denken natürlicherweise eingestellt ist? Fest steht, dass Wahrscheinlichkeiten und Prozente nirgendwo in der Umwelt wahrgenommen werden können und somit bei „natürlichen" menschlichen Denkvorgängen kaum verarbeitet werden. Welche weiteren Möglichkeiten gibt es, um Unsicherheit darzustellen? Für stochastische Informationen gibt es die folgenden numerischen Repräsentationsformate[3]:

Numerische Repräsentationsformate von Unsicherheit	Beispiel
Prozente	40%
Dezimalzahlen	0,4
Brüche (relative Häufigkeiten)	$\frac{4}{10}$
absolute Häufigkeiten	4 von 10
Chancen - Verhältnisse	4 : 6

Welches dieser Repräsentationsformate ist nun am besten menschlichen Denkvorgängen angepasst? Nach psychologischen Theorien über Gedächtnis und Aufmerksamkeit gehören absolute Häufigkeiten zu den wenigen Informationen, die automatisch registriert werden, d.h. ohne bewusste Intention und ohne Interferenz mit anderen kognitiven Prozessen (Hasher & Zacks, 1984). Demzufolge liegt es nahe, die von Eddy gestellte Aufgabe in absoluten Häufigkeiten darzustellen. Die Aufgabe lautet dann (Gigerenzer & Hoffrage, 1995):

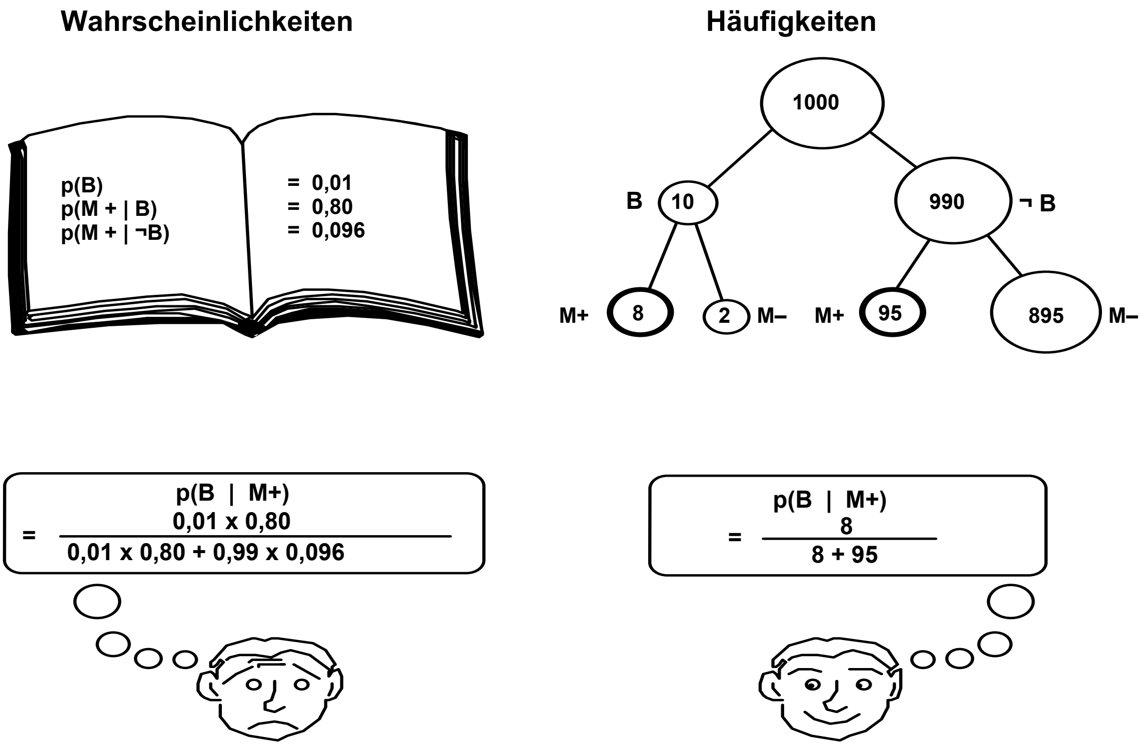
> Von je 1000 Frauen einer gewissen Altersgruppe haben 10 Brustkrebs. Von diesen 10 Frauen, die Brustkrebs haben, erhalten 8 einen positiven Mammografiebefund. Von den 990 restlichen Frauen, die keinen Brustkrebs haben, erhalten dennoch 95 einen positiven Mammografiebefund. Stellen Sie sich eine Anzahl von Frauen dieser Altersgruppe vor, die einen positiven Mammografiebefund erhalten haben. Wieviele dieser Frauen sind tatsächlich an Brustkrebs erkrankt?

In einer empirischen Untersuchung gaben nun wesentlich mehr, nämlich fast die Hälfte (46%) der Ärzte, die richtige Antwort: 8 von 103 (= 7,8%). Gigerenzer und Hoffrage nennen dieses Informationsformat „natural frequencies" (natürliche Häufigkeiten), weil in einer natürlichen Umgebung durch das Zählen von Fällen („natural sampling") diese Art von Information gewonnen werden kann. Das Häufigkeitsformat macht die Logik des Bayesianischen Schlusses auch für Menschen, die keine stochastische Ausbildung genossen haben, verständlich. Darüber hinaus ist die Visualisierung in einem „Häufigkeitsbaum" *(siehe Abbildung nächste Seite)* sehr intuitiv. Gigerenzer und Hoffrage (1995) stellten dem Häufigkeitsbaum das in Schulbüchern übliche Wahrscheinlichkeitsformat (links) gegenüber:

Im Gegensatz zum Wahrscheinlichkeitsformat kann man das Wesentliche der Aufgabe mit Hilfe des Häufigkeitsbaums einfach verstehen[4], denn man *sieht* geradezu: Obwohl die Krankheit bei relativ vielen der tatsächlich kranken Frauen mit der Mammografie auch erkannt wird (bei 8 von 10) und nur bei relativ wenigen der gesunden Frauen fälschlich diagnostiziert wird (bei 95 von 990), gibt es trotzdem viel mehr gesunde Frauen (95) als kranke (8) mit positivem Mammografiebefund. Das liegt ganz einfach daran, dass es *grundsätzlich* („a-priori") viel mehr Gesunde (990) als Kranke (10) gibt. Der Widerspruch zwischen Mathematik und Intuition wird also „repariert", wenn man die probabilistische Information in ein natürliches Informationsformat übersetzt.

[3] Nicht-numerische Repräsentationsformate von Unsicherheit sind zum Beispiel verbale Aussagen wie „sehr sicher" oder „eher unwahrscheinlich".

[4] Strick (2000) visualisiert das Brustkrebsrisiko für eine Frau mit positivem Mammographiebefund durch einen Baum, der mit Wahrscheinlichkeiten besetzt ist. Dass diese Repräsentation dem Häufigkeitsbaum jedoch unterlegen ist, zeigen Sedlmeier und Gigerenzer (2002) empirisch. Für eine Umsetzung des Häufigkeitsbaumes in ein Computerlernprogramm siehe Sedlmeier (2001).



Warum ist diese Erkenntnis von Bedeutung? Da der Satz von Bayes im Schulunterricht meist wenig Beachtung findet, ruft die intensive Beschäftigung mit dieser Formel bei Mathematiklehrern oftmals Verwunderung hervor. Diese Verwunderung hat jedoch zwei Seiten: Hochschulstatistiker, die nicht mit der Gymnasial-Stochastik vertraut sind, können ihrerseits nur schwer glauben, dass diese für die Statistik so wichtige Formel, die ja sogar einen eigenständigen Statistikzweig begründet, im schulischen Stochastikunterricht kaum Beachtung findet. Auch im Berufsalltag können Bayesianische Schlüsse von Bedeutung sein. Der Satz von Bayes erlaubt es, Wahrscheinlichkeitseinschätzungen von Hypothesen zu korrigieren („updaten"), wenn neue Beobachtungen („Daten") verfügbar werden. In vielen Berufen ist genau diese Art von Umgang mit Unsicherheit gefordert: Ein Arzt hat zum Beispiel seine Vorstellung über den Gesundheitszustand eines Patienten (Hypothese) „upzudaten", wenn neue medizinische Testergebnisse (Daten) vorliegen. Ein Richter muss seine Einschätzung über die Schuld eines Angeklagten (Hypothese) neu überdenken, wenn neue Indizien (Daten) verfügbar sind.

Tatsächlich finden Gigerenzers und Hoffrages Ergebnisse bereits in der Medizin (Hoffrage & Gigerenzer, 1998; Gigerenzer, Hoffrage & Ebert, 1998) und in der Rechtsprechung (Krauss & Hertwig, 2000) Gehör. Experten (wie z.B. Ärzte oder Richter) können durch die Darstellung (Bayesianischer) Situationen im Häufigkeitsformat bei ihrer Urteilsfindung unterstützt werden. In England und Wales wurde diese Empfehlung übrigens durch den Court of Appeal bereits offiziell ausgesprochen: Kommunikation von DNA-Evidenz solle vor Gericht nur noch in ganzen Zahlen zugelassen werden, da die komplizierten Wahrscheinlichkeiten von niemandem verstanden würden (Redmayne, 1998).

Wie sieht es mit dem Satz von Bayes im Schulunterricht aus? Ist die Formel tatsächlich Gegenstand des Unterrichts, lassen sich Aufgaben wie die oben geschilderte Mammografieaufgabe in fast jedem Stochastikschulbuch finden, allerdings im Wahrscheinlichkeitsformat. Setzt man alle Wahrscheinlichkeiten nun richtig in den Satz von Bayes ein, kommt man zu dem Ergebnis, dass die gefragte Wahrscheinlichkeit überraschenderweise nur z.B. 7,8% beträgt. Ein solches der Intuition zuwiderlaufendes Ergebnis einer Bayesianischen Aufgabe wird in Schulbüchern meist mit Ausdrücken wie „erstaunlich" kommentiert (siehe z.B. Lambacher & Schweizer, LS Stochastik, 1988, S.97). Wir denken aber, dass es Aufgabe des Schulunterrichts sein sollte, den Schüler zu einer echten Einsicht zu führen und ihn nicht mit seiner Überraschung alleine zu lassen.

Der Satz von Bayes im Wahrscheinlichkeitsformat verlangt einiges vom Schüler. Es ist zu befürchten (und in der Praxis scheint genau das ein Problem zu sein), dass der Lernende, der zum ersten Mal mit derlei Denkweise konfrontiert ist, diese Abstraktionsleistung nicht bewältigt. Dass die mit dieser Formel errechneten Ergebnisse sich einer naiven Intuition entziehen und „überraschend" wirken können, scheint nicht verwunderlich. Nach einer gewissen Übung mit derlei Aufgaben vermögen Schüler zwar gegebene Wahrscheinlichkeiten routinehaft in die auswendig gelernte Formel einzusetzen und mechanisch das richtige Ergebnis zu berechnen, *warum* die Wahrscheinlichkeit für die Krankheit nach einem positiven Test aber nur 7,8% beträgt, bleibt weiterhin im Dunkeln.

Dass auch der Einsatz von Baumdiagrammen, *die mit Wahrscheinlichkeiten belegt sind* (z.B. Strick, 2000), keinen entscheidenden Fortschritt in Richtung Verständnis bedeutet, wird in Sedlmeier und Gigerenzer (2002) empirisch nachgewiesen. Auch die meisten anderen bisher unternommenen Versuche, die Intuition beim Satz von Bayes zu fördern, siehe z.B. Bea (1995), Tomlinson und Quinn (1997) oder Strick (1999), geben zwar Empfehlungen für eine Visualisierung, bleiben jedoch immer beim problematischen Wahrscheinlichkeitsformat.

Bisher didaktisch kaum beachtet wurde, dass eben nicht nur die Repräsentation der algorithmisch-strukturellen Eigenschaften, sondern auch die *Repräsentation der gegebenen Information* eine entscheidende Rolle bei der kognitiven Verarbeitung spielt. Das von uns vorgeschlagene Häufigkeitskonzept zur Förderung des Verständnisses des Satzes von Bayes berücksichtigt dies. Folgende weitere Argumente zur Verwendung unserer didaktischen Idee finden sich in Wassner, Krauss und Martignon (2002):

1 *Natürlichkeitsargument*

In der Natur beobachten wir Mengen von Entitäten. Um zu Wahrscheinlichkeitsurteilen zu kommen, zählen (oder schätzen) wir die Mächtigkeiten dieser Mengen. Zur Bestimmung von bedingten Wahrscheinlichkeiten betrachten wir deren Teilmengen und für „Bayesianische" Fragen schließlich haben wir Mächtigkeiten von Teilmengen miteinander zu vergleichen. Der Häufigkeitsbaum zeigt diesen für „Bayesianische Situationen" typischen Mengen-Teilmengen-Zusammenhang. Probleme, wie im Stochastikunterricht zu beobachten, treten erst auf, wenn natürliche Informationen dieser Art in bedingten Wahrscheinlichkeiten, denen man aufgrund der Normierung die Größe der Grundgesamtheit nicht mehr ansieht, ausgedrückt werden (Krauss, Martignon & Hoffrage, 1999). Erst jetzt kann es überhaupt zu dem häufigen Fehler der Missachtung der Basisrate („base rate neglect", Kahneman & Tversky, 1973) kommen, weil der im Häufigkeitsbaum automatisch stattfindende Transport der Basisrate quasi „wegnormiert" wird.

2 *Modell-Realität-Rückkopplungsargument*

Durch mathematische Abstraktion entsteht der Begriff der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses. In diesem *Modell* eines Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, P) können deduktiv aus dem axiomatischen Fundament Regeln und schließlich Ergebnisse erhalten werden. Ein Schüler, der die oben geschilderte Mammografieaufgabe im Wahrscheinlichkeitsformat bearbeitet hat, könnte sich nun aber fragen, was es eigentlich *bedeutet*, wenn eine Frau mit 7,8% Wahrscheinlichkeit Brustkrebs hat. Schließlich gibt es in der Realität nur Frauen mit oder ohne Brustkrebs. Erst das Ergebnis der Aufgabe im Häufigkeitsformat kann die Bedeutung dieser Wahrscheinlichkeit erhellen. Die zu erbringende Übersetzungsleistung von Wahrscheinlichkeiten in absolute Häufigkeiten und umgekehrt trägt zum Grundverständnis des Begriffs der Wahrscheinlichkeit bei, da dadurch die erforderliche Rückkopplung Modell-Realität geübt wird. Unverständlich ist, wieso diese Rückkopplungen nach der Abstraktion des Begriffs der Wahrscheinlichkeit meist als nicht mehr notwendig aufgegeben werden.[5]

3 *Sequenzargument*

Allgemein bietet das Baumdiagramm gegenüber anderen grafischen Modellen (Vierfeldertafel, Einheitsquadrat, andere Mengendarstellungen) die Möglichkeit, die einfließenden Informationen *mehrstufig*, in Form einer sequentiellen Hierarchie darzustellen. Für Anwendungssituationen des Satzes von Bayes erweist sich dieser Vorteil als sehr Verständnis fördernd (Krauss & Hertwig, 2000; Hoffrage & Gigerenzer, 1998). Häufigkeitsbäume erlauben das *sequentielle Erleben* der Wahrscheinlichkeitsrevision und zeigen den Einfluss der Informationen auf das Gesamtergebnis von Baumebene zu Baumebene. Das Modell rechnet quasi selbst mit und das Ergebnis einer Aufgabe lässt sich aus den Endknoten einfach ablesen.

[5] Die Einführung der bedingten Wahrscheinlichkeit erfolgt zunächst über absolute Häufigkeiten. Erst durch "Erweiterung" mit der Mächtigkeit der Grundgesamtheit Ω entsteht die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit als Quotient zweier (unbedingter) Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Schlussbemerkung

Selbstverständlich ist für eine tiefer gehende Einführung in die Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten unbestritten auch die mathematische Abstraktion nötig. Wir halten es jedoch für ratsam, möglichst lange auf die Formalisierung zu verzichten, wenn man Einsicht beim Schüler fördern will. *Verständnis* wird schwerlich über abstrakte Formeln erreicht.

Die Mammografieaufgabe ist nicht die einzige Bayesianische Aufgabe, die mit absoluten Häufigkeiten leichter wird: Auch für weitere im Unterricht gerne verwendete kognitive Täuschungen Bayesianischer Art lassen sich Häufigkeitsformulierungen finden, selbst wenn diese Aufgaben in ihrer Struktur von der Mammografieaufgabe abweichen (für eine Anwendung des Häufigkeitskonzeptes auf das berühmte „Ziegenproblem" siehe z.B. Krauss & Wang, 2003; Atmaca & Krauss, 2001).

Das Häufigkeitskonzept lässt sich auch auf Aufgaben übertragen, bei denen der Satz von Bayes mehrere Male angewendet werden muss, wie das zum Beispiel zur Berechnung eines Krankheitsrisikos nach *zwei* vorliegenden Testergebnissen der Fall ist (Martignon & Wassner, 2001; Krauss, Martignon & Hoffrage, 1999). Martignon und Wassner (2001) zeigen auch, wie sich die beiden Wahrscheinlichkeitsbäume (normaler und inverser Wahrscheinlichkeitsbaum, siehe z.B. Strick, 2000) mit Hilfe der Häufigkeitsdarstellung elegant in einen einzigen „erweiterten Baum" überführen lassen.

Darüber hinaus lässt sich das Häufigkeitskonzept auch auf nicht-Bayesianische Bereiche der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausdehnen: Eine weitere berühmte kognitive Täuschung aus dem heuristics and biases Programm von Tversky und Kahneman ist z.B. die „conjunction fallacy" (Konjunktionstäuschung), die meist an folgender Aufgabe demonstriert wird:

> *Linda ist 31 Jahre alt, alleinstehend, sehr intelligent und sagt offen ihre Meinung. Sie hat Philosophie studiert. Während der Studienzeit beschäftigte sie sich ausführlich mit Fragen der Gleichberechtigung und der sozialen Gerechtigkeit und nahm auch an Anti-Atomkraft-Demonstrationen teil.*

Welche der beiden Aussagen ist wahrscheinlicher?

Aussage A: *Linda ist eine Bankangestellte.*

Aussage B: *Linda ist eine Bankangestellte und ist in der feministischen Bewegung aktiv*

Zahlreiche Untersuchungen führten immer wieder zum selben Ergebnis: 80% bis 90% der Versuchspersonen wiesen Aussage B eine höhere Wahrscheinlichkeit zu als Aussage A. Diese Einschätzung ist aber falsch, da die Wahrscheinlichkeit der Konjunktion zweier Ereignisse nie größer sein kann als die Wahrscheinlichkeit eines der beiden Einzelereignisse.[6] Eine Formulierung der „Lindaaufgabe" in absoluten Häufigkeiten wäre nun:

> *Stellen Sie sich 100 Personen vor, auf die Lindas Beschreibung passt. Wie viele dieser Personen sind*
>
> *A) Bankangestellte?*
>
> *B) Bankangestellte und in der feministischen Bewegung aktiv?*

Formuliert man die Aufgabe in dieser Form, verschwindet die „conjunction fallacy" bei den meisten Versuchspersonen (Hertwig & Gigerenzer, 1999).

Das Häufigkeitskonzept hat den Vorteil, dass es durch eine Vielzahl von empirischen Untersuchungen bereits abgesichert ist. Alle Untersuchungen belegen, dass probabilistische Situationen besser verstanden werden, wenn sie in Häufigkeiten ausgedrückt werden. Es zeigt sich also, dass die eingangs gestellte Frage, ob menschliches Denken und Wahrscheinlichkeitstheorie zwei Seiten einer Medaille sind, nicht unabhängig vom Repräsentationsformat der gegebenen Wahrscheinlichkeitsinformation beantwortet werden kann.

Für die Didaktik der Stochastik dürfte auch das folgende Forschungsergebnis von Relevanz sein: Der Erfolg beim Begreifen des Satzes von Bayes im Häufigkeitsformat ist nicht nur von kurzfristiger Art. Versuchspersonen, die ein entsprechendes Training absolviert haben, können auch nach längerer Zeit noch Aufgaben zum Satz von Bayes lösen, *selbst wenn diese Aufgaben dann im Wahrscheinlichkeitsformat präsentiert werden*. Sie übersetzen die Aufgaben einfach ins Häufigkeitsformat und lösen sie dann korrekt (Sedlmeier, 1997). Lehrer, die den Satz von Bayes ausschließlich als Wahrschein-

[6] Die zu dieser Aussage gehörige Formel lautet: $p(A \cap B) \leq p(A)$.

lichkeitsformel unterrichten, berichten dagegen meist, dass das Gelernte schnell wieder vergessen wird.

Literatur:

Atmaca, S. & Krauss, S. (2001). Der Einfluss der Aufgabenformulierung auf stochastische Performanz – Das "Drei-Türen-Problem". *Stochastik in der Schule, 21, 3*, S. 14-21.

Barth, F. & Haller, R. (1996): *Stochastik Leistungskurs*. Ehrenwirth.

Bea, W. (1995). Stochastisches Denken – Analysen aus kognitionspsychologischer und didaktischer Perspektive. In: Crott, H.W. and Scholz, R.W. (Hrsg.): *Psychologie des Entscheidungsverhaltens und des Konflikts*. Frankfurt a.M.: Europäischer Verlag der Wissenschaften.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases,* 249-267. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition, 43,* 197-223.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102*, 684-704.

Gigerenzer, G., Hoffrage, U. & Ebert, A. (1998). AIDS counselling for low risk clients. *AIDS CARE, 10,* 197-211.

Hasher, L., & Zacks, R. T. (1984). Automatic processing of fundamental information: The case of frequency of occurrence. *American Psychologist*, *39*, 1372–1388.

Hertwig, R. & Gigerenzer, G. (1999). The "Conjunction Fallacy" revisited: How Intelligent Inferences Look Like Reasoning Errors. *Journal of Behavioral Decision Making, 12, p. 275-305.*

Hoffrage, U. & Gigerenzer, G. (1998). Using Natural Frequencies to Improve Diagnostic Inferences. *Academic Medicine, 73,* 538-540.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychological Review, 80 (4)*, 237-251.

Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Krämer, W. (1995). *Denkste! Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen*. Campus Verlag Frankfurt/Main.

Krauss, S., Martignon, L. & Hoffrage, U. (1999). *Simplifying Bayesian Inference: The General Case*. In: Magnani, L., Nersessian, N. & Thagard, P. (Eds.): Model-Based Reasoning in Scientific Discovery. New York: Plenum Press.

Krauss, S. & Hertwig, R. (2000). Muss DNA-Evidenz schwer verständlich sein? Der Ausweg aus einem Kommunikationsproblem, *Monatsschrift für Kriminologie und Strafrechtsreform, 3,* S. 155-162.

Krauss, S. (2001). Wahrscheinlichkeit und Intuition – 2 Seiten einer Medaille? In: Borovcnik, M., Engel, J. & Wickmann, D. (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht: Die NCTM-Standards 2000, Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich*. Hildesheim: Franzbecker, S. 139-146.

Krauss, S. & Wang, X.T. (im Druck: März 2003). The Psychology of the Monty Hall Problem: Discovering Psychological Mechanisms for Solving a Tenacious Brain Teaser. *Journal of Experimental Psychology: General.*

Lambacher & Schweizer (1986). *LS Stochastik Leistungskurs*. Klett Verlag.

Martignon, L. & Wassner, C. (2001). Repräsentation von Information in der Wahrscheinlichkeitstheorie. In: Borovcnik, M., Engel, J. & Wickmann, D. (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht: Die NCTM-Standards 2000, Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich*. Hildesheim: Franzbecker.

Redmayne, M. (1998). The DNA database: Civil liberty and evidentiary issues. *Criminal Law Review, July*, 437-454.

Sedlmeier, P. (1997): BasicBayes: A tutor system for simple Bayesian inference. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers 29*, 328-336.

Sedlmeier, P & Gigerenzer, G. (2000). Was Bernoulli Wrong? On Intuitions on Sample Size.

Journal of Behavioral Decision Making, 13, p. 133-139.

Sedlmeier, P. & Gigerenzer, G. (2002). Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of Experimental Psychology: General*.

Sedlmeier, P. (2001). Statistik ohne Formeln. In: Borovcnik, M., Engel, J. & Wickmann, D. (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht: Die NCTM-Standards 2000, Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich*. Hildesheim: Franzbecker.

Strick, H. K. (1999). Vierfeldertafeln im Stochastikunterricht der Sek. I und II. *Praxis der Mathematik, 2/41.Jg*., 49-58.

Strick, H. K. (2000). Über die Schwierigkeiten, verständlich über Vorsorgemaßnahmen zur Krebsfrüherkennung zu informieren. *Praxis der Mathematik (PM), 6*, 247-248.

Tomlinson S. & Quinn R. (1997). Understanding Conditional Probability. *Teaching Statistics 19,1*, 2-7

.Wassner, C., Krauss, S. & Martignon, L. (2002).

Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? *Praxis der Mathematik (PM), Heft1/44*, S. 12-16.

Winter, H. (1992). Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. *Journal für Mathematikdidaktik, 13, 1*, S. 23-53.