

# Pascals Wette und die Logik statistischen Entscheidens. Ein theologisch–wahrscheinlichkeitstheoretischer Exkurs verbunden mit einer soziologischen Abschweifung – didaktisch motiviert <sup>1</sup>

HEINZ RENN, HAMBURG

---

**Zusammenfassung:** *Ausgehend von Problemen der Vermittlung statistischer Methoden in den sozialwissenschaftlichen Anwendungsfächern wird gezeigt, wie anknüpfend an eine fachfremde Fragestellung als didaktischem Kunstgriff in die Logik statistischen Entscheidens eingeführt und diese verständlich gemacht werden kann. Zentral ist hierbei der Begriff der Wette, der beginnend mit den theologischen Erörterungen PASCALS, sodann auf einen profanen Sachverhalt wie das Zigarettenrauchen bezogen, schließlich auf statistisches Entscheiden auf der Grundlage von Stichprobendaten übertragen wird. Die einheitliche Argumentationsstruktur sowie die übereinstimmenden Risikotypen werden herausgearbeitet.*

In der universitären Vermittlung statistischer Methoden in anwendenden Disziplinen wird der Hochschullehrer immer wieder – zumindest bei einem Teil seiner Hörer – mit fehlender Lernmotivation konfrontiert. Nur durch didaktische Kunstgriffe kann hier Abhilfe geschaffen werden. Zum einen besteht – insbesondere in den sozialwissenschaftlichen Anwendungsfächern – eine fast grundsätzliche Mathematik-Phobie, die bei dieser besonderen Klientel daraus resultieren mag, daß etwa ein Soziologiestudium nur deshalb aufgenommen wird, weil man nach der Schule nie mehr etwas mit Mathematik zu tun haben will. Eine Einschätzung, die sich spätestens beim obligatorischen Grundkurs ‚Statistik für Soziologen‘ als Fehlschluß erweist. Im Erwerb von Kenntnissen in Mathematik und Statistik liegt wohl die besondere ‚Widerständigkeit‘ der sozialwissenschaftlichen Fächer, einer ‚Widerständigkeit‘, die etwa mit dem Nachweis profunder Lateinkenntnisse beim Studium anderer Fächer zu vergleichen ist. Statistische Formeln seien für sie so etwas wie arabische Schriftzeichen – so einmal eine meiner Hörerinnen. Da wirkte der Hinweis, sie befinde sich damit in bester Gesellschaft, denn Thomas Mann habe im ‚Zauberberg‘ Ähnliches geäußert, eher zynisch als motivierend.

Neben dieser grundsätzlichen Unsicherheit, die nicht allein die Statistik, sondern alle vergleichbaren Anwendungen der Mathematik in den Sozialwissenschaften betrifft, ist es in der Methodenlehre

speziell der induktiven Statistik schwierig, insbesondere den Sachverhalt zu vermitteln, daß ein erzielt Ergebnis keine *sichere* Aussage darstellt, sondern nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage, die immer mit *Unsicherheit* behaftet ist. Unter einer gemeinhin vorherrschenden *deterministischen* Perspektive stellt sich regelmäßig fast zwingend die *Entweder-Oder-Frage*: Steht hinter dem in einer Stichprobenuntersuchung aufgezeigten Effekt eine in der Grundgesamtheit vermutete systematische Wirkungsgröße *oder* ist dieses Stichprobenergebnis allein auf den Zufall zurückzuführen. Daß jeder Effekt – und sei er noch so groß – völlig zufällig sein kann und in der Folge dieses Umstandes immer eine *Entscheidung* auf der Grundlage von Wahrscheinlichkeiten erforderlich ist, verblüfft. Insbesondere gilt dies für den Sachverhalt, daß – einerlei welche Wahl man trifft – die getroffene Entscheidung *immer* mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit *falsch* sein kann: Die Entscheidung *gegen den Zufall* ist mit dem Risiko verbunden, daß es doch der Zufall ist; die Entscheidung *für den Zufall* ist umgekehrt mit dem Risiko verbunden, daß der Stichprobeneffekt auf eine in der Grundgesamtheit vorliegende systematische Wirkungsgröße zurückgeht. Die *probabilistische* Sichtweise, die das Fehlen einer eindeutigen Determination toleriert und Ungewißheit, die mit der getroffenen Entscheidung jeweils verbundenen ist, lediglich bewertet, scheint noch zu neu und insoweit noch nicht in das allgemeine Denken eingegangen zu sein. Dies ist nicht verwunderlich, da ein solches Denken nur dreieinhalb Jahrhunderte alt ist und erst mit der von Pierre de FERMAT und Blaise PASCAL entwickelten Wahrscheinlichkeitsrechnung geistesgeschichtlich wirksam wird<sup>12</sup>. Die allgemeine Verbreitung neuer Sichtweisen in den Köpfen der Menschen hat offenbar eine längere Inkubationszeit. Vielleicht begünstigt aber auch die Evolution das deterministische Denken gegenüber dem probabilistischen. Sei es wie es sei, mit diesem Tatbestand ist die statistische Methodenlehre didaktisch konfrontiert und hat ihn in Rechnung zu stellen.

Im folgenden will ich zeigen, wie – ausgehend von einer auf den ersten Blick fachfremden Fragestel-

---

<sup>1</sup> Prof. Dr. Heinrich FISCH, Bonn, zum achtzigsten Geburtstag gewidmet

<sup>2</sup> FERMAT, Pierre de, und PASCAL, Blaise (1654), *Correspondence*. Veröffentlicht 1679 in Toulouse.

lung als didaktischem Kunstgriff – in eine schwierige stochastische Problematik eingeführt und diese weiterführend verständlich gemacht werden kann. Bei dieser Fragestellung handelt es sich um theologische Überlegungen, die Blaise PASCAL – nicht als Wahrscheinlichkeitstheoretiker, sondern nach seinem Bekehrungserlebnis (1654) – anstellte, um eine Person zu überzeugen, es sei vorteilhafter, im Leben an Gott zu glauben und deshalb gottgefällig zu handeln, als dies nicht zu tun. Dabei entwickelt PASCAL eine allgemeine ‚Logik des Ungewissen‘, die der skizzierten Problemstellung statistischen Entscheidens entspricht. Der theologische Bezug eines solchen Exkurses scheint zudem für heutige Studentengenerationen im besonderen Maße motivierend zu sein, als ein solcher Blickwinkel für diese eine gewisse Exotik besitzt.

Zentral für die weiteren Erörterungen ist der Begriff der *Wette*. Wetten heißt allgemein, einen *Einsatz* auf einen Sachverhalt zu wagen, von dem man nicht weiß, ob er existiert oder nicht existiert. Existiert der Sachverhalt, so erhält man einen *Gewinn*, existiert er nicht, so verliert man den Einsatz. Eine Wette kann somit als das Verhältnis von potentielltem Gewinn und Einsatz charakterisiert werden:

$$\text{Wette} = \frac{\text{potentieller Gewinn}}{\text{Einsatz}}$$

Wetten heißt, eine Entscheidung bei vorhandener Unsicherheit treffen. Beim Wetten muß vom Wettenen zwangsläufig ein Risiko eingegangen werden. Die Höhe des Einsatzes entspricht diesem Risiko. Im folgenden soll schrittweise zum Verständnis der Grundlogik statistischen Entscheidens hingeführt werden. Wir beginnen mit diesbezüglichen theologischen Erörterungen PASCALS und beziehen diese sodann auf den profanen Sachverhalt des Zigarettenrauchens. Danach wird der Gedankengang auf statistisches Entscheiden auf der Grundlage von Stichprobendaten übertragen. Die einheitliche Argumentationsstruktur sowie die übereinstimmenden Risikotypen werden jeweils erörtert.

## 1 Pascals Wette: Eine Wette auf die Existenz Gottes

Blaise PASCAL (1623 – 1662) unternimmt in seinen „Gedanken über die Religion“<sup>3</sup>, die er – nachdem er vorher einige Jahre ein durchaus weltmännisches Leben in Paris geführt hatte – nach seinem Rückzug in das jansenistische Kloster Port Royal verfaßte, eine Verteidigung des Christentums gegen

<sup>3</sup> „*Pensées sur la religion et sur quelques autres sujets*“ entstanden etwa zwischen 1656 und PASCALS Tod 1662. Veröffentlicht aus dem Nachlaß 1669 bzw. 1670. Erste deutsche Übersetzung Augsburg 1710.

Atheisten und Skeptiker. Dabei stellt er die Überlegung an, „daß es schwer ist, das Dasein Gottes durch die natürlichen Geisteskräfte zu beweisen, aber daß das Sicherste ist, es zu glauben“<sup>4</sup>.

PASCAL geht somit davon aus, daß die Wirklichkeit, d. h., ob es Gott gibt oder nicht gibt, vom Menschen nicht erkannt werden kann. Vielmehr hat der Mensch zu entscheiden, ob er an Gott glaubt oder nicht. PASCAL wettet auf die Existenz Gottes. Dies wird als *Pascals Wette* bezeichnet. Es geht ihm darum, zu zeigen, daß das Verhältnis von potentielltem Gewinn zum Einsatz bei einer Entscheidung *für* den Glauben überaus günstiger ist als bei einer Entscheidung *gegen* den Glauben.

### 1.1 Struktur der Argumentation

Die Struktur der Argumentation PASCALS hat folgende Logik.

- Die *Wirklichkeit* – obgleich ungewiß – hat zwei denkbare Zustände (vgl. die Kopfzeile des Schemas in Abbildung 1):  
(A) *Gott existiert nicht* bzw. (B) *Gott existiert*.

		WIRKLICHKEIT	
		(A) <i>Gott existiert nicht</i>	(B) <i>Gott existiert</i>
<u>E</u> <u>N</u> <u>T</u> <u>S</u> <u>C</u> <u>H</u> <u>E</u> <u>I</u> <u>D</u> <u>U</u> <u>N</u> <u>G</u>	(a)	(1) <u>richtige</u> Entscheidung ⇒ <u>potentieller Gewinn des Atheisten:</u> irdische Freuden	(3) <u>falsche</u> Entscheidung ⇒ <u>Risiko des Atheisten:</u> ewige Verdammnis
	(b)	(2) <u>falsche</u> Entscheidung ⇒ <u>Risiko des Gläubigen:</u> Verzicht auf irdische Freuden	(4) <u>richtige</u> Entscheidung ⇒ <u>potentieller Gewinn des Gläubigen:</u> ewige Seligkeit

Abbildung 1: Argumentationsstruktur und Risiken einer Glaubensentscheidung nach Blaise PASCAL

- Die *Entscheidung*, die der Mensch hierauf bezogen treffen kann, besteht ebenfalls in zweifacher Hinsicht (vgl. die Randspalte des Schemas in Abbildung 1):

<sup>4</sup> Zitat nach der deutschen Übersetzung durch Karl Adolf BLECH von 1840, entnommen der *DIGITALEN BIBLIOTHEK*, Bd. 2: *Philosophie von Platon bis Nietzsche*, Berlin: Directmedia 1998, 2. Hauptteil, 3. Abschnitt, Seite 12109 – 12119. Bei diesem Zitat handelt es sich um die Überschrift des entsprechenden Abschnittes der ‚*Pensées*‘, in dem *Pascals Wette* beschrieben wird.

(a) *Ich glaube nicht an Gott* bzw.

(b) *Ich glaube an Gott.*

Die Gegenüberstellung von Wirklichkeit und Entscheidung führt zu einer Konstellation, die durch die vier Kombinationsfelder der Abbildung 1 repräsentiert wird:

(1) *Gott existiert nicht und ich glaube nicht an Gott*

(2) *Gott existiert nicht und ich glaube an Gott*

(3) *Gott existiert und ich glaube nicht an Gott*

(4) *Gott existiert und ich glaube an Gott*

Die Felder (1) und (4) entsprechen einer jeweils *richtigen* Entscheidung unter der Voraussetzung, daß der jeweilige Zustand der Wirklichkeit, *Gott existiert nicht* bzw. *Gott existiert*, richtig ist. Hingegen präsentieren die beiden übrigen Felder (2) und (3) – ebenfalls den jeweiligen Zustand der Wirklichkeit vorausgesetzt – eine jeweils *falsche* Entscheidung. Diese Felder decken sich mit den Risiken einer Glaubensentscheidung:

- Das *Risiko des Gläubigen* besteht in der falschen Entscheidung, an Gott zu glauben, obwohl er *nicht* existiert.
- Das *Risiko des Atheisten* besteht in der falschen Entscheidung, *nicht* an Gott zu glauben, obwohl er existiert.

Festzuhalten ist, daß über den zutreffenden Zustand der Wirklichkeit *nichts* bekannt ist. Jede der vier möglichen Ergebnisse der beiden Entscheidungen ist immer das Ergebnis einer *Entscheidung unter Unsicherheit*.

## 1.2 Entscheidungen und Entscheidungsfolgen

PASCAL betrachtet nun die Folgen einer Glaubensentscheidung. Diese Entscheidungsfolgen sind in den einzelnen Feldern der Abbildung 1 wiedergegebenen:

- Existiert Gott nicht (A),
  - so *gewinnt* derjenige, der nicht an ihn glaubt (a) und daher *kein* gottgefälliges Leben führt, *irdische Freuden* (1),
  - derjenige aber, der an ihn glaubt (b) und daher ein gottgefälliges Leben führt, *verzichtet* auf *irdische Freuden* (2).
- Existiert Gott (B),
  - so droht demjenigen, der nicht an ihn glaubt (a) und daher *kein* gottgefälliges Leben führt, die *ewige Verdammnis* (3),
  - demjenigen aber, der an ihn glaubt (b) und daher ein gottgefälliges Leben führt, winkt die *ewige Seligkeit* (4).

Die Entscheidungsfolgen (2) und (3) sind die Risiken einer Glaubensentscheidung. Sie bilden jeweils den Wetteinsatz, der beim Fehlschlagen der Wette verlorengeht: Das *Risiko des Gläubigen* besteht im grundlosen *Verzicht auf irdische Freuden*, das *Risiko des Atheisten* in der *ewigen Verdammnis*. Dem stehen beim Erfolg der Wette die Entscheidungsfolgen (1) oder (4) jeweils als ein potentieller Gewinn gegenüber: Beim *Gläubigen*, der auf die Existenz Gottes setzt, die *ewige Seligkeit*, beim *Atheisten*, der wettet, daß Gott nicht existiert, der *Gewinn irdischer Freuden*.

Im Kalkül eines vernünftig Handelnden wägt PASCAL nun jeden Wetteinsatz gegenüber dem entsprechenden potentiellen Gewinn ab. Als Ergebnis dieser – modern gesprochen – nutzentheoretischen Analyse<sup>5</sup> empfiehlt er, an Gott zu glauben und ein gottgefälliges Leben zu führen. Denn in der Wette auf die Existenz Gottes setzt der Mensch, wenn er auf Gott setzt, nur die Nichtigkeit irdischer Freuden ein, um Unendliches, die ewige Seligkeit, zu gewinnen. Es ist das Verhältnis von – so im französischen Originaltext – „Infini“ zu „Rien“. Wenn der Mensch aber nicht auf Gott setzt, ist umgekehrt sein Einsatz, die ewige Verdammnis, unendlich höher gegenüber dem potentiellen Gewinn irdischer Freuden.

So rational damit eine solche Glaubensentscheidung in der Abwägung der resultierenden Entscheidungsfolgen begründet erscheint, steht doch hinter diesem Ergebnis eine bestimmte Präferenz, die von PASCAL subjektiv in den Kalkül eingeführt wird: Die Geringschätzung irdischer Freuden gegenüber dem Heilsversprechen im Jenseits. Bei einer umgekehrten Präferenz kann die Argumentation der *Pascalschen Wette* auch dazu dienen, aus nutzentheoretischen Erwägungen *nicht* auf die Existenz Gottes zu setzen. Dies geschieht in vielen volkstümlichen Erzählungen, wenn jemand um eines irdischen Vorteils willen seine Seele an den Teufel verkauft. In einer solchen Wette ist das Risiko die ewige Verdammnis, ein Einsatz, der offenbar – möglicherweise nur temporär und situativ bedingt – gegenüber dem irdischen Vorteil als gering erachtet wird. Regelmäßig wird aber in solchen Geschichten der Teufel – sozusagen ‚glaubenskorrekt‘ – zum guten Schluß immer hereingelegt.

<sup>5</sup> Vgl. hierzu auch Hans LOEFFEL, der eine Formalisierung der *Pascalschen Wette* vornimmt und darauf hinweist, daß diese bereits den Keim zur modernen Theorie der strategischen Spiele enthält. [Hans LOEFFEL, *Blaise Pascal 1623 – 1662. Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser, 1987 (Vita Mathematica; Bd. 2), Seite 145–147*].

## 2 Rauchen: Eine Wette auf die Gesundheitsschädlichkeit

Wir können nun dieses Schema auf *jedwede* Handlungsentscheidung eines Menschen übertragen wie etwa auf die Entscheidung über den profanen Sachverhalt, Zigaretten zu *rauchen* oder *nicht zu rauchen*. Hier soll als Entscheidungskriterium die Gesundheitsschädlichkeit des Zigarettenrauchens gelten. Eine derartige ‚Wette‘ entspricht in ihrer Struktur *Pascals Wette*. Während dort auf die Existenz Gottes gewettet wird, richtet sich hier die Wette auf die Gesundheitsschädlichkeit des Zigarettenrauchens. Diese Wette kann folglich durch ein Schema charakterisiert werden, das *Pascals Wette* entspricht. Die beiden denkbaren Zustände der *Wirklichkeit* sind hier (A) *Rauchen schadet nicht der Gesundheit* bzw. (B) *Rauchen schadet der Gesundheit*. Diese werden mit den beiden Möglichkeiten einer hierauf bezogenen *Entscheidung*, (a) *Ich rauche* bzw. (b) *Ich rauche nicht*, konfrontiert (vgl. Abbildung 2).

		WIRKLICHKEIT	
		(A) <i>Rauchen schadet nicht der Gesundheit</i>	(B) <i>Rauchen schadet der Gesundheit</i>
<u>E</u> <u>N</u> <u>T</u> <u>S</u> <u>C</u> <u>H</u> <u>E</u> <u>I</u> <u>D</u> <u>U</u> <u>N</u> <u>G</u>	(a) <i>Ich rauche</i>	(1) <u>richtige</u> Entscheidung: ⇒ <i>potentieller Gewinn des Rauchers: Genuß</i>	(3) <u>falsche</u> Entscheidung ⇒ <i>Risiko des Rauchers: Erkrankung</i>
	(b) <i>Ich rauche nicht</i>	(2) <u>falsche</u> Entscheidung ⇒ <i>Risiko des Nichtraucher: Verzicht auf Genuß</i>	(4) <u>richtige</u> Entscheidung: ⇒ <i>potentieller Gewinn des Nichtrauchers: Erhalt der Gesundheit</i>

Abbildung 2: Argumentationsstruktur und Risiken einer Handlungsentscheidung am Beispiel des Zigarettenrauchens

Auch in dieser Gegenüberstellung von Wirklichkeit und Entscheidung gibt es vier Entscheidungsfolgen, die durch die Kombinationsfelder der Abbildung 2 repräsentiert werden. Die Felder (1) und (4) entsprechen einer jeweils *richtigen* Entscheidung – auch hier unter der Voraussetzung, daß der jeweilige Zustand der Wirklichkeit, *Rauchen schadet nicht der Gesundheit* bzw. *Rauchen schadet der Gesundheit*, zutrifft –, einerseits der des Rauchers, der, da Rauchen nicht der Gesundheit schadet, sich ‚einem

Genuß ohne Reue‘ – wie es in einem Werbeslogan für Zigaretten heißt – hingeben kann, andererseits der des Nichtraucher, der nicht raucht, da Rauchen der Gesundheit schadet, und der sich folglich seiner Gesundheit weiter erfreuen kann. Hingegen repräsentieren die beiden übrigen Felder (2) und (3) – ebenfalls den jeweiligen Zustand der Wirklichkeit vorausgesetzt – eine jeweils *falsche* Entscheidung. Die entsprechenden Risiken sind:

- Das *Risiko des Rauchers*, das sich aus der falschen Entscheidung ergibt, zu rauchen, obwohl es der Gesundheit schadet und er folglich etwa an Lungenkrebs erkrankt.
- Das *Risiko des Nichtrauchers*, das sich aus der falschen Entscheidung ergibt, *nicht* zu rauchen, obwohl es der Gesundheit *nicht* schadet und er folglich auf den Genuß des Zigarettenrauchens grundlos verzichtet.

Wiederum ist anzumerken, daß über den zutreffenden Zustand der Wirklichkeit *nichts* bekannt ist. Jede der vier möglichen Ergebnisse der beiden Entscheidungen ist immer das Ergebnis einer *Entscheidung unter Unsicherheit*.

Die Risiken einer Handlungsentscheidung zum Rauchen sind auch hier jeweils der Wetteinsatz, der beim Fehlschlagen der Wette verlorengeht: Das *Risiko des Rauchers* besteht in der *Erkrankung*, das *Risiko des Nichtrauchers* im grundlosen *Verzicht auf Genuß*. Dem steht beim Erfolg der Wette jeweils ein potentieller Gewinn gegenüber: Beim *Raucher*, der auf die Schadlosigkeit des Rauchens setzt, der *Genuß*, beim *Nichtraucher*, der wettet, daß Rauchen der Gesundheit schadet, der *Erhalt seiner Gesundheit*.

Bezüglich der nutzentheoretischen Überlegung, ob man rauchen oder nicht rauchen soll, liegt aber ein wichtiger Unterschied zu den entscheidungsbezogenen Überlegungen PASCALS vor. In *Pascals Wette* sind theoretische Reflexionen die Grundlage der Entscheidung. Eine objektive Begründung – erst recht auf *empirischer* Grundlage – ist für PASCAL *prinzipiell* nicht möglich. Die Bezeichnung ‚wahrscheinlichkeitstheoretischer Gottesbeweis‘, die mitunter für *Pascals Wette* verwendet wird, ist daher nicht richtig, zumal PASCAL einen objektiven Gottesbeweis nicht nur für unmöglich hält, ja er sieht den Versuch, einen solchen zu führen, geradezu als frevelhaft an<sup>6</sup>. Dem ist jedoch nicht so bei

<sup>6</sup> Die Bezeichnung ‚wahrscheinlichkeitstheoretischer Gottesbeweis‘ zeugt wiederum von einem deterministischen Denken, das nach Gewißheit strebt, und das geradezu den für das Denken PASCALS charakteristischen probabilistischen Witz verkennt. Bei *Pascals Wette* handelt es sich dagegen um die Anwendung eines Nutzen-

profanen Handlungsentscheidungen wie die über das Rauchen. Vielmehr kann hier auf empirischer Grundlage entschieden werden, ob Rauchen die Gesundheit gefährdet oder nicht. Stichproben sind dann die empirische Basis von Handlungsentscheidungen.

### 3 Statistisches Entscheiden: Eine Wette auf den Zufall

Bei der Diskussion, ob Rauchen von Zigaretten der Gesundheit schadet oder nicht, wird immer ein Bericht der obersten Gesundheitsbehörde der Vereinigten Staaten von Amerika (*U.S. Department of Health, Education and Welfare*) aus dem Jahre 1964 zu den gesundheitlichen Folgen des Rauchens, der sogenannte TERRY-Report, herangezogen. Die Aussagen dieses Berichts, der die Gesundheitsschädlichkeit des Zigarettenrauchens als Befund hat, beruhen auf Stichprobenuntersuchungen. Kriterium der Gesundheitsschädlichkeit des Rauchens ist die höhere Erkrankungsrate an Lungenkrebs von Rauchern gegenüber Nichtrauchern. Anhand von Stichprobenerhebungen zur Gesundheit von Rauchern und Nichtrauchern soll ermittelt werden, was in den entsprechenden Grundgesamtheiten wirklich der Fall ist.

Auch dieses Vorgehen kann als Wette beschrieben werden. Gewettet wird hier, ob ein Stichprobeneffekt, der eine Gesundheitsschädlichkeit des Rauchens möglicherweise indiziert, sich auf den Zufall zurückführen läßt oder nicht. Dies ist die Grundlogik statistischen Entscheidens. Für das Auftreten der einzelnen Entscheidungsfolgen – und somit auch der möglichen Risiken – können Wahrscheinlichkeiten bestimmt und somit auch die entsprechenden Wetten quantifiziert werden.

#### 3.1 Logik statistischen Entscheidens

Bezeichnen wir die Erkrankungsrate an Lungenkrebs in der *Grundgesamtheit* von Rauchern mit  $\mu_1$  und die von Nichtrauchern mit  $\mu_2$ , so ist Rauchen gesundheitsschädlich, wenn

$$\mu_1 - \mu_2 > 0.$$

Dies ist zunächst nur eine Vermutung, für die ein empirischer Bezug hergestellt werden muß. Dies geschieht durch zufällig gezogene Stichproben einer bestimmten Größe zum Rauchverhalten der Bevölkerung. Für diese Stichproben wird die mittlere Erkrankungsrate der Raucher mit  $\bar{x}_1$  und die der Nichtraucher mit  $\bar{x}_2$  ermittelt und die Differenz

zwischen den beiden Erkrankungsraten in den *Stichproben*

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

bestimmt. Nun ist eine *Entscheidung* darüber zu treffen, ob diese Differenz *rein zufällig* ist oder nicht. Dies ist eine *Wette auf den Zufall*. Die reine Zufallswirkung wird als *Nullhypothese*  $H_0$ , eine Wirkung, die ein höheres Erkrankungsrisiko der Raucher anzeigt, als *Alternativhypothese*  $H_a$  bezeichnet. Dieses sind die Hypothesen eines statistischen Prüfverfahrens – etwa eines z-Tests für Mittelwertdifferenzen. Mathematisch ausgedrückt ergibt sich:<sup>7</sup>

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Anhand der Stichprobendaten wird untersucht, ob eine Zufallswirkung vorliegt oder nicht. Geprüft wird somit nur die Nullhypothese: Sie wird entweder angenommen oder abgelehnt. Bei der *Annahme der Nullhypothese* wird auf eine *Zufallswirkung* geschlossen. Die entsprechende Testentscheidung bezeichnen wir mit  $T_0$ . Bei der *Ablehnung der Nullhypothese* wird vermutet, daß *keine Zufallswirkung* vorliegt. Die entsprechende Testentscheidung bezeichnen wir mit  $T_a$ . Letzteres wird dahingehend interpretiert, daß die in der *Alternativhypothese* formulierte Wirkung für das Abweichen vom Zufall der Grund ist<sup>8</sup>.

Auch hier wird eine Gegenüberstellung von *Wirklichkeit* und *Entscheidung* vorgenommen, bei der es ebenfalls vier Kombinationsfelder gibt (vgl. Abbildung 3).

<sup>7</sup> Anzumerken ist, daß es sich hier um eine sog. *einseitige* Fragestellung handelt, da eine Wirkungsrichtung vorgegeben wird, insoweit als man vermutet, daß  $\mu_1$  bei einer gesundheitsschädlichen Wirkung des Rauchens größer sein wird als  $\mu_2$ . Die Nullhypothese enthält somit nicht nur die Relation „=“, sondern auch die Relation „<“, da die letztgenannte Relation eine der gesundheitsschädlichen Wirkung des Rauchens diametral entgegengesetzte Wirkung, d. h. eine gesundheitsfördernde, anzeigt. Insoweit ist bei einseitigen Fragestellungen – wie in diesem Fall – die Nullhypothese immer eine zusammengesetzte Hypothese. Zufallskritisch geprüft wird folglich nur eine *positive* Differenz der Erkrankungsraten.

<sup>8</sup> Die Alternativhypothese als solche wird in einem zufallskritischen Testverfahren *nicht* geprüft.

kalküls auf eine für PASCAL existentielle Frage, bei deren Beantwortung Gewißheit nicht möglich ist.

		<b>WIRKLICHKEIT</b>	
		(A) Nullhypothese $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$	(B) Alternativhypothese $H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$
<b>E N T S C H E I D U N G</b>	(a) $T_0$ : <u>Annahme</u> der Nullhypothese $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$	(1) <u>richtige</u> Entscheidung ⇒ Statistische Signifikanz Wahrscheinlichkeit $p = 1 - \alpha$ ⇒ potentieller Gewinn des <u>Kritikers</u>	(3) <u>falsche</u> Entscheidung ⇒ Fehler 2. Art [ $\beta$ -Fehler oder Risiko II] Wahrscheinlichkeit $p = \beta$ ⇒ Risiko des <u>Kritikers</u>
	(b) $T_a$ : <u>Ablehnung</u> der Nullhypothese mit der interpretativen Folgerung: Geltung der Alternativhypothese $H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$	(2) <u>falsche</u> Entscheidung ⇒ Fehler 1. Art [ $\alpha$ -Fehler oder Risiko I] ⇒ Irrtumwahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit $p = \alpha$ ⇒ Risiko des <u>Entdeckers</u>	(4) <u>richtige</u> Entscheidung ⇒ Teststärke Wahrscheinlichkeit ⇒ $p = 1 - \beta$ potentieller Gewinn des <u>Entdeckers</u>

Abbildung 3: Argumentationsstruktur und Risiken einer statistischen Entscheidung

Die denkbaren Zustände der Wirklichkeit, d. h. Gegebenheiten in der Grundgesamtheit, beziehen sich auf die Geltung des Zufalls (vgl. die Kopfzeile des Schemas in Abbildung 3):

(A) Das in der Nullhypothese Behauptete liegt vor.  
(B) Das in der Alternativhypothese Behauptete liegt vor.

Die beiden Möglichkeiten einer hierauf bezogenen Entscheidung mittels eines statistischen Prüfverfahrens sind (vgl. die Randspalte des Schemas in Abbildung 3):

$T_0$ : Annahme der Nullhypothese

$T_a$ : Ablehnung der Nullhypothese

Wiederum entsprechen die Felder (1) und (4) einer jeweils *richtigen* Entscheidung – auch hier unter der Voraussetzung, daß der jeweilige Zustand der Wirklichkeit, *das in der Nullhypothese Behauptete* bzw. *das in der Alternativhypothese Behauptete*, zutrifft. Dies ist einmal die *richtige* Entscheidung *für* die Nullhypothese, die *statistische Signifikanz*. Zum anderen ist es die *richtige* Entscheidung *gegen* die Nullhypothese. Dies ist die Fähigkeit eines

Tests, einen in der Grundgesamtheit vorhandenen Unterschied als solchen zu erkennen, die *Teststärke*.

Hingegen präsentieren die beiden übrigen Felder (2) und (3) jeweils eine *falsche* Entscheidung. Die entsprechenden Risiken bezeichnen die Fehlermöglichkeiten einer statistischen Entscheidung:

- Den *Fehler erster Art*, der sich aus der falschen Entscheidung ergibt, den Zufall als Ursache *abzulehnen*, obwohl dies *zutrifft*. Dieser Fehler wird auch  $\alpha$ -Fehler oder *Risiko I* genannt.
- Den *Fehler zweiter Art*, der sich aus der falschen Entscheidung ergibt, den Zufall als Ursache *anzunehmen*, obwohl dies *nicht zutrifft*. Dieser Fehler wird auch  $\beta$ -Fehler oder *Risiko II* genannt.

Diese beiden Fehlerarten sind die Risiken einer jeden Handlungsentscheidung mittels eines statistischen Testverfahrens auf der Grundlage empirischer Daten. Auch hier ist anzumerken, daß über den zutreffenden Zustand in der Grundgesamtheit *nichts* bekannt ist. Jede der vier möglichen Ergebnisse von Entscheidungen ist immer das Ergebnis einer *Entscheidung unter Unsicherheit*.

Wir können diese Fehler ebenfalls ‚personifizieren‘ und sie als Einsätze in Wetten bezogen auf den Zufall deklarieren. In diesem Sinne können zwei *Forschertypen* mit jeweils charakteristischer subjektiver Präferenz unterschieden werden:

- Der *Entdecker* hat die Präferenz, einen systematisch bedingten Unterschied in den Daten zu ermitteln. Das Risiko des Entdeckers ist somit der *Fehler erster Art*. In seinem Streben, etwas zu entdecken, lehnt er den reinen Zufall als Ursache eines Stichprobenergebnisses ab. Die Höhe dieses *Risikos I* ist somit sein *Einsatz*, um einen systematisch bedingten Unterschied als *Gewinn* zu ermitteln. Der Entdecker geht eine Wette *gegen* den Zufall ein.
- Der *Kritiker* zeichnet sich gegenüber dem Entdecker durch die umgekehrte Präferenz aus, da er die systematische Bedingtheit eines in den Daten gefundenen Unterschiedes in Zweifel zieht und den Zufall als hinreichende Erklärung favorisiert. Bildlich gesprochen: Der Kritiker neidet dem Entdecker die Entdeckung und möchte sie rückgängig machen. Das Risiko des Kritikers ist somit der *Fehler zweiter Art*. Die Höhe dieses *Risikos II* ist daher sein *Einsatz*, um den *Gewinn* zu erzielen, die Zufallsbedingtheit einer Entdeckung nachzuweisen. Der Kritiker geht eine Wette *auf* den Zufall ein.

### 3.2 Wahrscheinlichkeiten der Entscheidungsfolgen

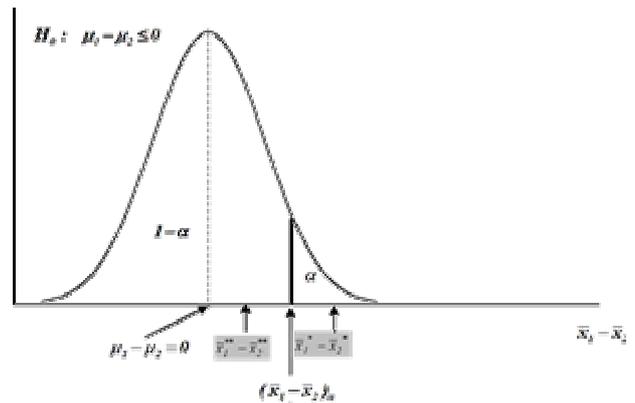
Die Wahrscheinlichkeiten  $p$  jeder einzelnen der vier möglichen Entscheidungsfolgen können bewertet werden. Es handelt sich dabei immer um *bedingte* Wahrscheinlichkeiten, da eine Entscheidung nur unter der Voraussetzung, daß ein bestimmter Zustand der Wirklichkeit vorliegt, richtig oder falsch ist. Über die Wirklichkeit, d. h. über die Gegebenheiten in der Grundgesamtheit, wissen wir nichts. Wir haben lediglich die Indikation eines Stichprobenergebnisses  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ , in unserem Beispiel eine positive Differenz zwischen den Erkrankungsraten von Rauchern und Nichtrauchern in Stichproben.

#### 3.2.1 Stichproben als Ergebnis des Zufalls

Zunächst hat man sich vor Augen zu führen, daß das für bestimmte Stichproben ermittelte Ergebnis nur eines von vielen möglichen ist, da man zufällig auch andere Stichproben hätte ziehen können. Allerdings sind diese vielen möglichen Ergebnisse mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten<sup>9</sup> zu erwarten. Diese Wahrscheinlichkeiten liegen als Häufigkeitsverteilung eines Spektrums aller zufällig möglichen Stichprobenergebnisse vor<sup>10</sup>. Dies ist die Verteilung der sog. *Zufallsvariablen*, die jeweils die Wahrscheinlichkeit anzeigt, mit der sich *jedes* Stichprobenergebnis rein zufällig ergeben kann. In Abbildung 4 wird eine solche Verteilung wiedergegeben.

<sup>9</sup> Wenn hier von ‚Wahrscheinlichkeiten‘ gesprochen wird, so ist dies im Falle des Vorliegens einer kontinuierlichen Verteilung – wie in unseren Beispiel – nicht ganz korrekt, da *kontinuierliche* Verteilungen keine Wahrscheinlichkeiten einzelner Ausprägungen des Wertebereichs, sondern *Wahrscheinlichkeitsdichten* für Intervalle zwischen Ausprägungen des infinitesimal untergliederbaren Wertebereichs enthalten. *Diskrete* Verteilungen bestehen allerdings aus *Wahrscheinlichkeiten einzelner Ausprägungen*. Für die Darlegung der hier in Frage stehenden Problematik ist dieser Sachverhalt jedoch *nicht* bedeutsam.

<sup>10</sup> Dies soll nicht heißen, daß eine solche Häufigkeitsverteilung durch vielfach wiederholte Stichprobenziehungen empirisch ermittelt werden muß. Sie wird in der Regel mit Hilfe der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgehend von einem bestimmten Modell der Grundgesamtheit theoretisch abgeleitet. So können wir in unserem Falle unterstellen, daß – bei hinreichend großen Stichproben – als Verteilungsform der Verteilung der Zufallsvariablen eine Normalverteilung vorliegt.



Annahmehbereich der  $H_0$  | Ablehnungsbereich der  $H_0$

Abbildung 4: Verteilung der Zufallsvariablen  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  in der Situation der Nullhypothese

Dies ist in unserem Beispiel eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Wertebereich von  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ , die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit Unterschiede in den Erkrankungsraten von Rauchern und Nichtrauchern *rein per Zufall* in Stichproben zu erwarten sind.

#### 3.2.2 Situation der Nullhypothese

Die in Abbildung 4 dargestellte Verteilung möglicher Stichprobenergebnisse gilt für den Fall, daß in der Grundgesamtheit *kein* Unterschied zwischen den Erkrankungsraten der Raucher und Nichtraucher gegeben ist. Dies ist die Situation, in der die *Nullhypothese* die Wirklichkeit zutreffend beschreibt. Diese Verteilung liegt mit ihrem Schwerpunkt – ausgedrückt durch den Erwartungswert – bei  $\mu_1 - \mu_2 = 0$  (siehe die gestrichelte Linie in Abbildung 4). Damit ist diese Verteilung die Wahrscheinlichkeitsverteilung aller Stichprobenergebnisse im Falle eines in der Grundgesamtheit *fehlenden* Unterschiedes der Erkrankungsraten der Raucher und Nichtraucher.

Zwei potentielle Stichprobenergebnisse haben wir zur Erläuterung der Problematik herangezogen:  $\bar{x}_1^* - \bar{x}_2^*$  und  $\bar{x}_1^{**} - \bar{x}_2^{**}$  (siehe die grau unterlegten Symbole in Abbildung 4). Betrachtet man diese Stichprobenergebnisse, die unter der Voraussetzung der Geltung der Nullhypothese erzielt werden könnten, und ihre Wahrscheinlichkeiten, so zeigt sich, daß das Stichprobenergebnis  $\bar{x}_1^* - \bar{x}_2^*$  eine geringere Wahrscheinlichkeit hat als das Stichprobenergebnis  $\bar{x}_1^{**} - \bar{x}_2^{**}$ .

Welches Ergebnis beschreibt nun die Grundgesamtheit am ehesten, wenn *tatsächlich* ein Unterschied zwischen Rauchern und Nichtrauchern hinsichtlich der Gesundheitsschädlichkeit des Zigarettenrauchens besteht? Sinnvoll erscheint es, das *un-*

wahrscheinlichere der beiden Ergebnisse zu nehmen. Bei diesem ist die Wahrscheinlichkeit, daß in diesem Ergebnis lediglich der Zufall zum Ausdruck kommt, vergleichsweise gering. Die Gewissheit, daß nicht der Zufall die Ursache ist, gibt es jedoch nicht. Eine Entscheidung ist daher nur unter Hin-nahme einer Wahrscheinlichkeit, sich zu irren, zu fällen. Diese Wahrscheinlichkeit ist die Wahr-scheinlichkeit eines *Fehlers erster Art*, die Irr-tumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ . Diese ist der Einsatz des Entdeckers, der somit auch die Höhe seines Einsatzes auswählt<sup>11</sup>. Der gewählten Irrtumswahrschein-lichkeit  $\alpha$  entspricht ein kritischer Wert  $[\bar{x}_1 - \bar{x}_2]_\alpha$ <sup>12</sup>, der den Wertebereich der Verteilung der Zufallsvariablen in einen *Annahme-* und einen *Ablehnungsbereich* der Nullhypothese unterteilt. Betrachten wir nun unsere beiden Stichprobener-gebnisse:

- Das Ergebnis  $\bar{x}_1^* - \bar{x}_2^*$  fällt in den *Ablehnungs-*bereich der Nullhypothese. Wir entscheiden, daß die Erkrankungsrate der Raucher höher ist als die der Nichtraucher. Diese Entscheidung kann jedoch mit der Wahrscheinlichkeit von  $p = \alpha$  falsch sein, da mit dieser Wahrscheinlichkeit auch rein zufällig derartige Stichprobener-gebnisse vorliegen können. Dies ist die *Irrtums-*wahrscheinlichkeit  $\alpha$ , die dem *Risiko des Entde-*ckers entspricht, der *gegen den Zufall wettet*.
- Das Ergebnis  $\bar{x}_1^{**} - \bar{x}_2^{**}$  fällt hingegen in den *Annahmebereich* der Nullhypothese, infolgedes- sen entscheiden wir, daß es sich bei diesem Stichprobenergebnis um einem rein zufälligen Unterschied der Erkrankungs-raten handelt: Die Erkrankungsrate der Raucher ist *nicht* höher als die der Nichtraucher. Diese Entscheidung ist mit der Wahrscheinlichkeit von  $p = 1 - \alpha$  eine rich-tige Entscheidung. Dieser Wahrscheinlichkeit entspricht die *statistische Signifikanz*. Diese ist das logische Komplement zur Irrtumswahr-scheinlichkeit  $\alpha$ , deren Gegenwahrscheinlich-keit. Die statistische Signifikanz ist der potentielle *Gewinn des Kritikers*, der *auf den Zufall wettet*.

<sup>11</sup> Da bei dem hier betrachteten Beispiel untersucht wird, ob die Erkrankungsrate der Raucher höher ist als die der Nichtraucher, wird die gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  am positiven Ende der Verteilung der Zufallsvariablen abgetragen.

<sup>12</sup> Da wir die Verteilung der *Zufallsvariablen* allgemein mit dem Wertebereich der Stichprobenergebnisse  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  angeben, wird auch der kritische Wert hinsicht-lich der Art des Testes neutral formuliert und nicht als  $t_\alpha$  bei einem *t*-Test bzw.  $z_\alpha$  bei einem *z*-Test für Mit-telwertdifferenzen.

### 3.2.3 Situation der Alternativhypothese

Wie ist es nun, wenn in der Grundgesamtheit *tat-sächlich* ein systematischer Unterschied zwischen Rauchern und Nichtrauchern hinsichtlich der Ge-sundheitsschädlichkeit des Zigarettenrauchens vor-liegt? Jetzt ist es die *Alternativhypothese*, die die Wirklichkeit zutreffend beschreibt: Die Erkrankungsrate der Raucher ist höher als die der Nicht-raucher:  $\mu_1 - \mu_2 > 0$ . In diesem Falle gilt eben-falls eine Verteilung der Zufallsvariablen, die die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse von Zufalls-stichproben  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  *unter dieser Bedingung* wie-dergibt. Diese Verteilung hat jedoch eine andere Lage. Sie liegt mit ihrem Schwerpunkt – ausgedrückt durch den Erwartungswert – bei  $\mu_1 - \mu_2 > 0$ . In Abbildung 5 wird die Verteilung der Zufallsvariablen wiedergegeben, die für die Si-tuation der Alternativhypothese gilt, in der in die Erkrankungsrate der Raucher höher ist als die der Nichtraucher (siehe die gepunktete Linie in Abbil-dung 5).

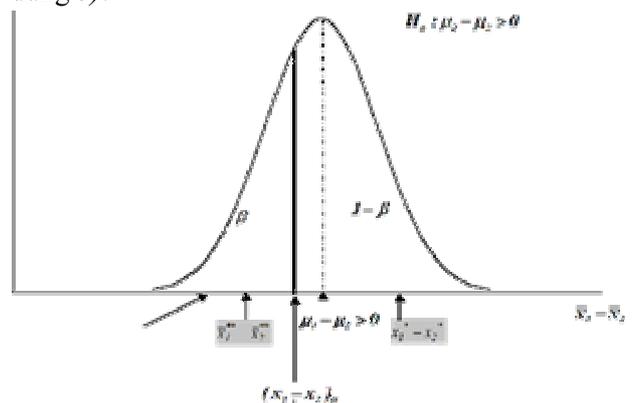


Abbildung 5: Verteilung der Zufallsvariablen  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  in der Situation der Alternativhypothese

Betrachtet man die beiden Stichprobenergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten, nunmehr unter der Voraussetzung der Geltung der Alternativhypothese und gleichbleibender Aufteilung des Wertebereichs von  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  in einen Annahme- und einen Ablehnungsbereich der Nullhypothese durch den gewählten kritischen Wert  $[\bar{x}_1 - \bar{x}_2]_\alpha$ , so sind diese Ergebnisse jetzt im Vergleich zur Situation der Nullhypothese anders zu beurteilen:

- Das Stichprobenergebnis  $\bar{x}_1^* - \bar{x}_2^*$  hat eine höhere Wahrscheinlichkeit, die Situation der Alternativhypothese rein zufällig zu repräsentieren als das Stichprobenergebnis  $\bar{x}_1^{**} - \bar{x}_2^{**}$ <sup>13</sup>.

<sup>13</sup> Sie fällt zudem in den Ablehnungsbereich der Nullhypothese, so daß auch per Test auf einen systematisch bedingten Unterschied geschlossen wird.

Die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit beträgt  $p = 1 - \beta$ . Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, einen in der Grundgesamtheit vorhandenen Unterschied als solchen zu entdecken, die *Teststärke*. Die Teststärke ist der potentielle Gewinn des Entdeckers, der gegen den Zufall wettet.

- Umgekehrt ist die Wahrscheinlichkeit, die Situation der Alternativhypothese rein zufällig zu repräsentieren, für das Stichprobenergebnis  $\bar{x}_1^{**} - \bar{x}_2^{**}$  geringer als für das Stichprobenergebnis  $\bar{x}_1^* - \bar{x}_2^*$ . Eine Entscheidung für die Nullhypothese beim Ergebnis  $\bar{x}_1^{**} - \bar{x}_2^{**}$  wäre aber möglicherweise eine falsche Entscheidung. Die Wahrscheinlichkeit, sich in diesem Sinne zu irren, ist die Wahrscheinlichkeit eines *Fehlers zweiter Art*, die dem Risiko des Kritikers entspricht, der auf den Zufall wettet. Das logische Komplement zu diesem Risiko II ist die Teststärke als dessen Gegenwahrscheinlichkeit.

### 3.2.4 Die Wetten

Anhand der Wahrscheinlichkeiten der vier Entscheidungsfolgen lassen sich die Wette des Entdeckers (I) und die des Kritikers (II) quantifizieren:

$$(I) \quad \text{Wette des Entdeckers} = \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

$$(II) \quad \text{Wette des Kritikers} = \frac{1 - \alpha}{\beta}$$

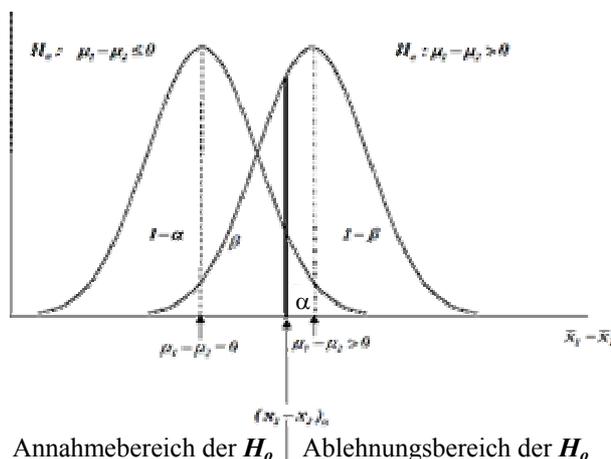
Entsprechend der oben angesprochenen Interessenlagen der beiden Forschertypen ergeben sich Präferenzen für die Höhen der jeweiligen Einsätze.

- Der *Entdecker*, der einen systematisch bedingten Unterschied in den Daten ermitteln will, ist bereit, die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  hoch anzusetzen und somit einen hohen Einsatz gegen den Zufall zu wagen.
- Der *Kritiker*, der gemäß seiner Präferenz einen ermittelten Unterschied in Zweifel zieht, akzeptiert nur eine kleine Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ .
- Dem entspricht, daß der *Entdecker* nur einen geringen Fehler *zweiter Art*  $\beta$  toleriert,
- während der *Kritiker* den  $\beta$ -Fehler relativ hoch anzusetzen bereit ist, um so mit einem hohem Einsatz, eine Wette auf den Zufall einzugehen.

Die Festlegung der Höhe der Risiken  $\alpha$  bzw.  $\beta$  hängt somit *nicht* von objektiv mathematisch-statistischen Gegebenheiten ab, vielmehr ergibt sich diese aus *subjektivem* Ermessen. Festzuhalten ist, daß weder der *Entdecker*, noch der *Kritiker* ohne Risiko eine Entscheidung treffen kann.

Da eine Entdeckung immer vor ihrer Kritik auftritt, hat der *Entdecker* bei der Festlegung seines Einsatzes gewissermaßen Priorität. Dem entspricht auch die Praxis der Datenanalyse beim statistischen Testen: Die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ , die Höhe des *Fehlers erster Art*, wird in der Regel vorab festgelegt und nicht die des *Fehlers zweiter Art*  $\beta$ <sup>14</sup>.

Die Wahrscheinlichkeit eines *Fehlers zweiter Art*  $\beta$  hängt aber von der Höhe der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  ab. Dies zeigt Abbildung 6, in der die beiden Verteilungen der Zufallsvariablen – zum einen die der Situation der *Nullhypothese*, zum anderen die der Situation der *Alternativhypothese* – gegenübergestellt werden. Beide Fehlerarten stehen in einem *antagonistischen* Verhältnis zueinander: Ist  $\alpha$  groß, so ist in der Tendenz  $\beta$  klein und umgekehrt. Wichtig ist jedoch, daß die Beziehung zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  *nicht* logisch komplementär ist, denn weitere Sachverhalte spielen für das Verhältnis der beiden Fehlerarten zueinander eine Rolle.



Annahmehbereich der  $H_0$  | Ablehnungsbereich der  $H_0$

Abbildung 6: Abhängigkeit des Fehlers erster Art  $\alpha$  zum Fehler zweiter Art  $\beta$

Die Wirkung dieser Gegebenheiten zeigt sich im *Überschneidungsbereich* der beiden Verteilungen der Zufallsvariablen. Bei festliegender Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  kann  $\beta$  somit einmal durch *Vergrößerung der Stichproben* verringert werden, da bei einer Vergrößerung der Stichprobe auch die jeweilige Streuung der Zufallsvariablen – ausgedrückt durch den entsprechenden Standardfehler der Schätzung – kleiner wird, so daß der Überschneidungsbereich der beiden Verteilungen entsprechend abnimmt. Auch der in der Grundgesamtheit tatsächlich vorhandene Unterschied ist bei gleichbleibender Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  für die Größe des *Fehlers zweiter Art*  $\beta$  relevant. In diesem Falle liegen die beiden Verteilungen weiter auseinander und werden sich infolgedessen weniger überschneiden. Schließlich ist noch die *Form der*

<sup>14</sup> Diese Konvention wird mitunter durchaus kritisiert.

*Verteilung* der Zufallsvariablen ausschlaggebend. Die typische Glockenform der *Normalverteilung* ist hinsichtlich einer Verringerung der Überschneidung besonders günstig etwa gegenüber der Form einer *Gleichverteilung*.

Aus diesen Sachverhalten ergeben sich für den *Entdecker* entsprechende Möglichkeiten, seine Wette zu verbessern. Obwohl mit der Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  die Höhe des *Einsatzes* in seiner Wette vorab bestimmt ist, kann er durch Verringerung des *Fehlers zweiter Art*  $\beta$  seinen *potentiellen Gewinn*  $1 - \beta$  steigern. Sein Wettverhältnis wird dadurch günstiger:

- Einmal kann er die *Stichproben vergrößern*. Allerdings ist hier zu beachten, daß mit einem wachsendem  $n$  auch die Kosten einer Untersuchung steigen.
- Ein in der Grundgesamtheit *tatsächlich vorhandener Unterschied* ist als solcher jedoch nicht veränderbar, zumal er in seinem Ausmaß durch den in Frage stehenden Test noch zu entdecken ist. Durch eine gute *Untersuchungsanordnung*<sup>15</sup> und die Wahl eines *trennscharfen Kriteriums*  $x$  kann ein vorhandener Unterschied aber eher ermittelt werden<sup>16</sup>. Insbesondere die Implementationsmöglichkeiten einer Untersuchungsanordnung und deren Kosten dürften entsprechenden Aktivitäten aber eine Grenze setzen.
- Die *Form der Verteilung* der Zufallsvariablen ergibt sich aus der Art des statistischen Prüfverfahrens. So wird der Entdecker eher einen parametrischen Test mit einer günstigen Verteilungsform gegenüber einem nichtparametrischen Prüfverfahren bevorzugen. Die Grenzen sind in diesem Falle aber dadurch gesetzt, daß zum einen das *Skalenniveau* des Kriteriums  $x$  nichtmetrisch sein kann; zum anderen können nicht erfüllte Voraussetzungen der *Verteilung* des Kriteriums *in der Grundgesamtheit* die

---

<sup>15</sup> Eine Verbesserung der Untersuchungsanordnung ist beispielsweise dadurch zu erreichen, daß beim Vergleich zweier Gruppen, die Homogenität innerhalb der Gruppen und die Heterogenität zwischen den Gruppen gesteigert wird. In unserem Beispiel würden in der Gruppe der Nichtraucher nur *strikte* Nichtraucher zusammengefaßt, in der Gruppe der Raucher *keine* Gelegenheitsraucher aufgenommen.

<sup>16</sup> Als Kriterium ist dann nur ein Sachverhalt heranzuziehen, der sachlogisch–theoretisch begründet eindeutig in einem Zusammenhang zu dem untersuchten Verhalten steht. So ist in diesem Sinne als Operationalisierung einer durch Rauchen bedingten Erkrankung die Erkrankungsrate an Lungenkrebs geeigneter als die Erkrankungsrate an Bronchialkatarrh.

Anwendung eines parametrischen Tests verhindern<sup>17</sup>.

## 4 Leben mit Risiken

Auf der Grundlage begrenzten Wissens aus Stichprobenerhebungen ist Handeln ohne das Risiko, sich falsch zu entscheiden, folglich unmöglich. Dies liegt in der Logik statistischen Entscheidens begründet. Zwar handelt es sich bei vernünftigem Abwägen nur um kleine Risiken. Gewißheit ist aber nie zu erreichen. Leben mit derartigen ‚Restrisiken‘ gehört so zum Schicksal des Menschen.

Es ist das Verdienst PASCALS, diesen Sachverhalt erstmals durchschaut und analysiert zu haben. Sein Gläubiger ist nicht einfach ein Glaubender, vielmehr ist er eher ein *rationaler Agnostiker*: Ein Mensch, der weiß, daß er die Wirklichkeit als solche nicht erkennen kann, dem seine Klugheit gleichwohl rät, seine Handlungsalternativen gegeneinander abzuwägen und hieraus vernünftige Schlüsse zu ziehen. Das Menschenbild der Wette PASCALS ist somit das Menschenbild des modernen Menschen.

Welche Risiken der Mensch eingeht, hängt nicht nur von seinen subjektiven Präferenzen ab, sondern auch von der Verantwortung insbesondere hinsichtlich der sozialen Folgen seines Handelns sowie von seinen Interessen. Hierbei sind auch *institutionalisierte* Verantwortlichkeiten und Interessenlagen in Rechnung zu stellen. So gehen wir zu Beginn unserer Überlegungen vom Bericht der obersten Gesundheitsbehörde der Vereinigten Staaten von Amerika aus, in dem die Gesundheitsschädlichkeit des Zigarettenrauchens *statistisch* belegt wird. Das Interesse von *Gesundheitsbehörden* liegt zweifellos beim Nachweis einer solchen Gesundheitsschädlichkeit. Gesundheitsbehörden befassen sich mit Organisation und Durchführung der Krankenversorgung und den hierfür anfallenden Kosten. Mit dem Argument der Gesundheitsschädlichkeit kann gegen das Rauchen präventiv vorgegangen und so durch Rauchen bedingte Erkrankungen möglicherweise verhindert werden. Insoweit werden Kosten für die Behandlung dieser Krankheiten eingespart<sup>18</sup>. Die institutionalisierte Interessenlage von Gesundheitsbehörden ist mit derjenigen des *Entdeckers* gleichzusetzen. Dem steht die institutionalisierte Interessenlage der *Zigarettenindustrie* mit ihren gewinnorientierten Unternehmen gegenüber. Deren

---

<sup>17</sup> So wird etwa ein  $t$ -Test für Mittelwertdifferenzen nicht anwendbar sein, wenn die Verteilungsvoraussetzungen des in der Grundgesamtheit normalverteilten Kriteriums und die der Varianzhomogenität nicht gegeben sind.

Nutzen liegt beim Nachweis der gesundheitlichen Unschädlichkeit des Rauchens<sup>19</sup>. Mit dem Argument vom ‚Genuß ohne Reue‘ kann man den Absatz von Zigaretten ankurbeln. Die institutionalisierte Interessenlage der Zigarettenindustrie entspricht derjenigen des *Kritikers*.

Damit zeigt sich auch die normative Einbettung allen Handelns, das auf derartigen Entscheidungen basiert. Soziologisch-theoretisch betrachtet enthält so *Pascals Wette* bereits den Kern der modernen soziologischen *Rational-Choice-Theorie*, die rationales Handeln in normativ geprägten Kontexten zum Gegenstand hat. Eine Einführung in diesen Theorieansatz über den theologischen Exkurs der *Pascalschen Wette* wäre daher in didaktischer Hinsicht durchaus bedenkenswert.

#### Autor

Prof. Dr. rer. pol. Heinz Renn  
Universität Hamburg  
Institut für Soziologie  
Allende-Platz 1  
20146 Hamburg  
Email: heinzrenn@web.de

## Presse-ΣΠΛΙΤΤΕΡ (3)

Anzeige in einigen Tageszeitungen

29. Oktober 2004

Freuen Sie sich auf unsere neue Aktion im  
**Käfer'S Restaurant in der  
Spielbank Wiesbaden\***  
im November 2004:

**„RESTAURANT ROULETTE –  
Zahlen Sie mit Ihrem Glück!“**

Wir servieren Ihnen  
ein erlesenes 3-Gang-Menü  
zum Preis von maximal 36,00 € pro Person.

Zum Dessert bringen wir Fortuna in  
Form eines Roulettekessels ins Spiel.

Die Roulettekugel fällt auf eine Zahl  
zwischen 0 und 36 – und nur diesen  
ausgespielten Wert zahlen Sie  
für das komplette Menü.

Mit ein wenig Glück ist es  
vielleicht völlig kostenlos!

Wir freuen uns auf Ihren Besuch! Ihre

**SPIELBANK  
WIESBADEN**  
- SPIELEN & MEHR -

## Presse-ΣΠΛΙΤΤΕΡ (4)

Taunuszeitung. 24. Juni 2004

**Euscheid.** Ein schwer lesbarer Wahlzettel mit einem Namen in altdeutscher Handschrift hat in Euscheid (Kreis Bitburg-Prüm) die Auszahlung der Kommunalwahl erheblich erschwert. Erst eine unabhängige Schriftexpertin konnte den in Sütterlin notierten Namen eines Kandidaten zweifelsfrei entziffern. Der Kandidat kam dadurch bei der Wahl am 13. Juni wie 2 andere Kandidaten auf 33 Stimmen und schaffte per Los den Sprung in den Ge-

<sup>18</sup> Hier ist allerdings auf das – durchaus als zynisch zu bezeichnende – Argument zu verweisen, daß durch gesundheitsfördernde präventive Maßnahmen die Lebenserwartung erhöht wird, was dann letztlich zu höheren Kosten des Gesundheitswesens *insgesamt* führe.

<sup>19</sup> Daß dies trotz gegenteiliger Evidenz in den eigenen Forschungen der Zigarettenindustrie geschieht, zeigt eine neue Reanalyse diesbezüglicher Untersuchungen, die in der angesehenen medizinischen Zeitschrift LANCET kürzlich veröffentlicht wurde (vgl. LANCET, *Online – Ausgabe* vom 14. Januar 2005).

meinderat. Die nach dem Grafiker Ludwig Sütterlin (1865-1917) benannte Handschrift war im 19. und 20. Jahrhundert gebräuchlich.

---