Das Mang-Kung-Spiel (2)

JAN-JÜRGEN MENGE, ROTENBURG

***Zusammenfassung**: Es wird erneut das hier bereits vor 10 Jahren beschriebene Spiel Mang Kung aufgegriffen (Krug 1997). Im Gegensatz zum ursprünglichen Artikel untersuche ich die Möglichkeiten des Spiels für einen Stochastikunterricht in der Sekundarstufe I. Daraus können Impulse für die Sekundarstufe II entstehen.*

Ziel dieses Artikels ist es, ein motivierendes Spiel für den Stochastikunterricht aufzubereiten. Ein weiteres Ziel ist es, mit Simulationen umgehen zu lernen. Und drittens bietet das Thema Material für einen Projektunterricht oder die Begabtenförderung.

Insgesamt finden Sie eine spannende Möglichkeit, den Stochastikunterricht handlungsorientiert zu bereichern.

1 Das Spiel

Mang Kung wird im chinesischen Raum gespielt. Es ist ein Würfelspiel mit sechs ideal mathematischen Würfeln. Jeder Würfel hat 5 unbeschriftete Seiten und **eine** beschriftete Seite.

6	0	0	0	0	0	W6
0	**5**	0	0	0	0	W5
0	0	**4**	0	0	0	W4
0	0	0	**3**	0	0	W3
0	0	0	0	**2**	0	W2
0	0	0	0	0	**1**	W1

Tab. 1: Würfelbilder (0 oder leer); s.a. Kap.10

Es spielen in der einfachsten Version 3 Spieler miteinander. Jeder gibt 7 Einsatzeinheiten (€, Chips …) in einen Pool. Nach vereinbarter Regel wird ein Startspieler ermittelt. *Man wirft immer alle 6 Würfel und stellt die **Augensumme** fest*:

Ist die Augensumme kleiner als die Einheitenzahl im Pool (**AS < P**), dann **kann** der Spieler die der Augensumme entsprechenden Einheiten aus dem Pool entnehmen. Das Spiel geht an den Nächsten weiter.

1. Ist die Augensumme größer als die Anzahl Einheiten im Pool **(AS > P**), dann **muss** der Spieler den Differenzbetrag in den Pool einzahlen. Das Spiel geht an den Nächsten weiter.
2. Stimmen Augensumme und Anzahl Einheiten im Pool überein (**AS = P**), dann hat der Spieler das Spiel **gewonnen**. Er erhält den Pool und dazu *von jedem Mitspieler noch einmal die Einheiten*, die im Pool enthalten waren.
3. Das neue Spiel beginnt der Sieger des vorherigen Spiels.

2 Spielerweiterungen

Statt drei Spieler teilnehmen zu lassen, kann man auch weitere Mitspieler erlauben. Man geht dann so vor, dass der Pool solange um 21 erhöht wird, bis jeder Mitspieler einen ganzzahligen Einsatz machen kann.

Spieler	Einsatz/Sp.*	Pool**	WZ/S
3	7	21	20
4	21	84	38
5	21	105	44
6	7	42	26
7	3	21	20
8	21	168	62
9	7	63	32

Tab. 2: Spieleinsätze (WZ/S Würfe je Spiel; s. 6) *) Poolgröße/Anzahl Spieler **) kgV(Anzahl Spieler;21)

Wegen der notwendigen 21er-Fokussierung als höchste Augensumme auf den sechs Würfeln ist klar, dass die kleinste Mitspielerzahl drei sein muss.

Aufgrund der zu vermittelnden Erfahrung mit dem Spiel kann man auch bei großer Zahl von Einheiten im Pool davon ausgehen, dass der Pool sich rasch so weit reduziert, bis gewinnträchtige Poolgrößen entstehen (s. 5.2).

Die bereits erwähnte Simulationssoftware eröffnet die entsprechenden experimentellen Erkenntnismöglichkeiten.

Aus stochastischem Interesse kann man Variationen der Mang-Kung-Würfel-Zahl untersuchen:

Ein Mang-Kung-Würfel ist ein 0+x-Würfel, es lassen sich also beliebige Situationen konstruieren: Minimale Augensumme 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... mit 3, 4, 5, 6, 7, 8, … Würfeln der Mang-Kung-Art. Dabei gilt immer Poolgröße = kgV(Anzahl Spieler; max. Würfelsumme) und Einsatz pro Spiel = Poolgröße/Spielerzahl.

3 Anmerkungen zum Spiel

Zur mathematischen Untersuchung sollten die Regeln etwas vereinfacht werden. Für Simulationen ist die Vorgabe „kann … entnehmen“ in Regel 1 nicht gut zu verarbeiten (es ist intuitiv). Man sollte deswegen vor allem zu Beginn die Spielregel verschärfen zu „muss … entnehmen“. Man wird **entdecken**, dass dieses auch eine gute Variante für das Spiel ist.

Es fehlt nach der Recherche im asiatischen Raum auch eine Angabe, was passiert, wenn ein Spieler nach Regel 2 einzahlen muss, aber keine Geldeinheiten mehr hat. Am einfachsten untersucht man das Spiel zunächst mit „Anschreiben“, d.h. ein Spieler darf ins Minus rutschen.

Später wird man *entwickeln* können, *was die Kann-Regel strategisch bewirken mag.*

4 Methodik des Simulierens

Simulieren ist eine heuristische Methode der Erkenntnisgewinnung. Durch eine Simulation kann man Vermutungen finden. Diese können dann mit Hilfe anderer, formaler Methoden begründet werden. Das wird weiter unten versucht.

Simulieren können und Simulationen beurteilen können sind eigenständige Kompetenzen!

Zur Simulation des Spieles werden sowohl reale Würfelobjekte [2] als auch ein Computerprogramm [3; Menge 2007] bereitgestellt. In dem Simulationsprogramm werden möglichst alle Parameter frei gegeben, die das Spiel bedingen könnten; es können bis zu neun Spieler eingesetzt werden.

5 Untersuchungen

Es gibt zu solchen zufallsbehafteten Situationen Fragestellungen, die logisch entwickelt werden können, die aber zunächst nicht unbedingt mathematisch exakt beantwortet werden können oder müssen (weiter unten werden sie es aber teilweise doch).

Die aufgeworfenen Fragen sind sicherlich nicht abschließend vollständig. Manchmal stellen sich scheinbar logisch gestellte Fragen wie die der Spielerzahl-Abhängigkeit des Gewinnens als falsch gestellt heraus: Es geht nur um die anzuwendenden Chipeinsätze!

Um nicht nur dem Spieltrieb zu frönen, ist es angebracht, *vor eigenen Spielerfahrungen Hypothesen zu formulieren:*

Die Methodik der Simulation ***muss*** **vor ihrem Einsatz (begründete) Hypothesen** verlangen!

Die folgenden Bemerkungen zu den aufgeworfenen Fragen sind als **Hinweise** zu verstehen, solche Hypothesen mit Schülerinnen und Schülern zu formulieren.

5.1 Sammeln eigener Erfahrungen

In der ersten Stufe der Begegnung mit einem neuen Spiel *muss es erst einmal gespielt werden*, um es anzunehmen. Die dazu nötigen Würfel können u.a. beim Autor bezogen werden [2].

Schüler müssen erfahren, wie lange eine Runde dauern kann und wie sich der Pool entwickelt. Dabei sollte in Regel 1 „**muss**“ gesetzt werden.

Simulieren ist eine Variation naturwissenschaftlichen Arbeitens. Auch mit Realwurfgeräten simulieren Sie letztlich gegen den Verdacht der Idealität des Wurfgerätes. Simulieren Sie „sauber“, z.B. immer mit einem Wurf eines Gerätes aus einem Becher über einer standardisierten Unterlage (z.B. Filzmatte).

Schaffen Sie also Vertrauen in Simulationen!

Wenn Sie Simulationsprogramme verwenden wollen, benutzen Sie solche, die Einzelschritte der Simulation mit allen sichtbaren Daten dieses Einzelschritts ermöglichen; **nur so erzeugen Sie Vertrauen in Simulationssoftware**.

5.2 Ausloten der Spielbasis

Zu solchen Untersuchungen gibt es Standards:

- Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Minimal- oder Maximalwerte
- Erwartungswert der Zufallsvariablen
- Standardabweichung der Zufallsvariablen.

Im Gegensatz zum Originalaufsatz bin ich nicht der Meinung, dass die Arbeit einer „Wahrscheinlichkeit erzeugenden Funktion“ (ebd.) zu überlassen ist; ***ich*** *habe sie auch nicht verifizieren können*. Im Gegenteil: Das Sek-I-Wissen ist eine tragfähige Basis zum Generieren dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Man muss dazu lediglich klären, dass *alle Augensummenfälle singulär im Baumdiagramm* sind: Wenn die Augensumme 12 sich u.a. aus der Möglichkeit 6,5,1,0,0,0 ergibt, dann findet man dazu auch nur einen Weg durch den zugehörigen binären Baum, wie er beispielsweise in der Abbildung angedeutet ist.

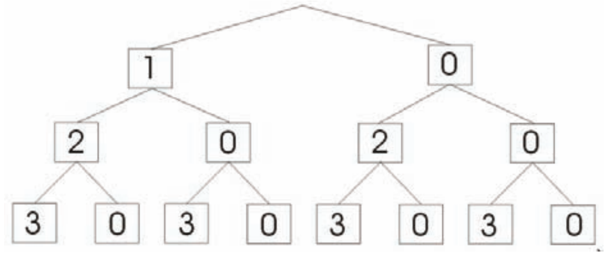

Abb.1: Baum für ein 3-Würfel-Mang-Kung

Die Wahrscheinlichkeit für den eben erwähnten Fall der AS 12 errechnet sich dann elementar zu $P(6,5,1,0,0,0) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Die Ermittlung der Augensummenfälle ist eine lohnende, lehrreiche Übung im Gruppenunterricht.

Da es $2^6=64$ Fälle sein müssen, ist zudem Konzentration angesagt. Es gibt eine kleine Handreichung zum Arbeiten, die ich am Beispiel der Augensumme 12 erläutere; Basiserkenntnis ist natürlich, dass Augenziffern nur einmal auftreten dürfen (Formale Algorithmen s. Kap.10).

12 = 6+5+1	Regel: Beginne mit den höchstmöglichen Ziffern
12 = 4+2+5+1	Regel: Zerlege eine der Ziffern, wenn möglich: hier 6
12 = 6+2+3+1	Regel wie zuvor, dieses Mal Zerlegung der 5
12 = 5+4+3	Regel: Addiere zwei Ziffern einer Zerlegung, hier 2 und 1 in der zweiten Zeile
12 = 6+4+2	Regel wie zuvor in der dritten Zeile für 3 und 1

Das ergibt folgende vollständige Verteilung:

Summe	Fälle					P
0						0,334898
1	1					0,066980
2	2					0,066980
3	3	2,1				0,080376
4	4	3,1				0,080376
5	5	4,1	3,2			0,093771
6	6	5,1	4,2	3,2,1		0,096451
7	6,1	5,2	4,3	4,2,1		0,042867
8	6,2	5,3	5,2,1	4,3,1		0,032150
9	6,3	5,4	5,3,1	6,2,1	4,3,2	0,034829
10	6,4	6,3,1	5,4,1	5,3,2	4,1,3,2	0,021969
11	6,5	6,4,1	6,3,2	5,4,2	5,3,2,1	0,021969
12	6,5,1	6,4,2	6,3,2,1	5,4,3	5,4,2,1	0,009109
13	6,5,2	6,4,2,1	6,4,3	5,4,3,1		0,006430
14	6,5,3	6,4,3,1	6,5,2,1	5,4,3,2		0,004287
15	6,5,4	6,4,3,2	6,5,3,1	5,4,3,2,1		0,003858
16	6,5,4,1	6,5,3,2	6,4,3,2,1			0,001179
17	6,5,4,2	6,5,3,2,1				0,000643
18	6,5,4,3	6,5,4,2,1				0,000643
19	6,5,4,3,1					0,000107
20	6,5,4,3,2					0,000107
21	6,5,4,2,3,1					0,000021

Tab. 3: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen des 6er-Mang-Kung

Der Erwartungswert der Augensumme (X = Augensumme) beträgt E(X) = 3,5 bei einer Standardabweichung σ = 3,6; man findet also in dieser Verteilung bereits über 80% der Wsk im 1σ-Bereich.

Die minimale Spieldauer beträgt 6 Würfe, die Wsk dafür ist

$$6! \cdot p(1) \cdot p(2) \cdot ... p(6) \approx 0{,}0002$$

Man sieht **an der grafischen Verteilung**, dass die Vorkommen der Augensummen bis 7 (1σ) „vernünftige" Erwartungen erwecken.

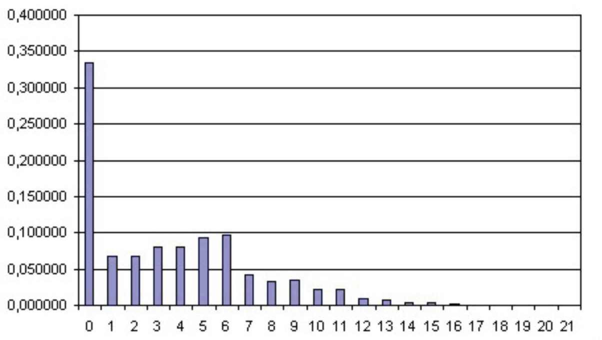

Abb. 2: Wahrscheinlichkeitsverteilung

Das eröffnet durchaus strategische Verhaltensweisen, da man auf Gewinnfälle für Augensummen vor allem im Bereich 1-6, ggf. 7 bauen sollte.

5.3 Fragestellungen

Etliche der folgenden Fragestellungen lassen sich sinnvoll mit Simulationen beantworten. Zu diesem Zweck gibt es ein Simulationsprogramm (Menge 2007), das man **nach wenigen notwendigen realen Spielen** durchaus einsetzen sollte.

Die Bemerkungen zu den aufgeworfenen Fragestellungen haben Modellcharakter: Sie könnten als Hypothesen mit den Schülern erarbeitet werden, **bevor** es ans Simulieren geht.

Die folgenden Grundaussagen beruhen auf einer MUSS-Einstellung der 1. Regel bzw. einer einstellbaren RANDOM-Einstellung (d.h. die Simulation entscheidet zufällig, ob weggenommen wird oder nicht). Außerdem gelten sie zunächst für ein 3-Spieler-Spiel, andere Situationen können simuliert werden.

5.3.1 *Wie viele Runden hat ein Spiel?*

(… bis es zu einem Gewinn kommt!)

Minimal 6 Runden, weil der Erwartungswert 3,5 beträgt (s.o.) und 21 Einheiten damit in 6 Runden abgeräumt werden können. Darüber hinaus sind die Rundenzahlen offen. Aus der Simulation ergibt sich eindeutig eine mittlere Erwartung von 20 Runden pro Spiel. Natürlich gibt es Abweichungen zwischen z.B. 10 und 54 Runden, aber die mittlere Erwartung von 20 ist deutlich stabil.

Diese Zahl sollte auch stabil bleiben, wenn man die Regel 1 für strategisches, also „Kann-Verhalten" verändert.

5.3.2 *Hat der Starter einen Vorteil?*

Es ist **natürlich unerheblich**, wer beginnt, da unter anderem die mittlere Spiellänge 20 Runden beträgt, in deren Verlauf sich Pseudo-Eröffnungsvorteile nivellieren (falls es sie gäbe).

Der Spielbeginn-Vorteil könnte nur greifen, wenn der Eröffnende im ersten Schritt den Gewinn abgreift. Dafür beträgt die Wsk 0,000021 (also in 21 Fällen von 1 Million Spiele)! Auf lange Sicht trägt dieses Argument nicht.

Wenn man das Spiel für mehr als drei Spieler betrachtet (s.u.), kann der Direktgewinn im ersten Schritt (Pool größer als 21) sowieso keine Rolle spielen.

5.3.3 *Gibt es eine Gewinnstrategie?*

Aufgrund der Basisüberlegungen sollten im Bereich der Augensummen 3 bis 6 (ungefähr) viele Wurfereignisse vorliegen. Daraus entwickelt sich eine Negativ-Strategie: Nimm nicht weg, wenn das Wegnehmen zu Poolzahlen zwischen 3 und 6 führt. Das kann in der Simulation eindrucksvoll nachgewiesen werden! Die Spielerchancen sind also vom Verhalten des Vorgängers abhängig.

Interessant sind Untersuchungen zur aktuellen Gewinnsituation: Wie ist die Augensumme im Moment des Spielgewinns? Auch hierzu bietet das Simulationsprogramm erschöpfende Informationen. Die Simulationen stützen natürlich Vorüberlegungen, nach denen die häufigsten Gewinn-Augenzahlen unter den ersten 8 Augensummen zu finden sind.

5.3.4 *Ist es ein faires Spiel?*

Diese Frage lässt sich für Spiele dieser Art grundsätzlich mit JA beantworten, weil jeder Spieler die gleichen Voraussetzungen hat. Es kann Variationen geben, wenn es Strategien gibt. Aber auch diese stünden ja jedem Spieler offen. Insbesondere kann man durch Simulation erfahren, dass die *Gewinnchance für ein Spiel* als ein Drittel angenommen werden darf. Das **bedeutet aber nicht unbedingt**, dass die **Gewinnsummen sich gleichmäßig verteilen**, weil es ja absolut zufällig ist, wie der Pool im Gewinnmoment aussieht.

Man kann in der Simulation belegen, dass der Gewinn an Werteinheiten nicht chaotisch verteilt ist.

Der Anteil gewonnener Spiele entspricht durchaus einem Drittel pro Spieler.

5.3.5 *Erwartungwert gewonnener Chips?*

Diese Frage ist eine Anschluss- oder Ergänzungsfrage zu 5.3.4: Wenn es ein faires Spiel ist, müssten letztlich auch die Chips pro Spiel (cps im Simulationsprogramm) ein konvergierendes Verhalten zeigen. Interessanterweise zeigt sich hier wieder die Zahl 21 – ein Erwartungswert passend zur initialen Poolbestückung.

Ein Beobachter entwickelt für solche Erwartungswerte durchaus ein natürliches Gefühl anhand des Simulationsprogramms.

5.3.6 *Ist das Spiel etwas für Spielbanken?*

Der dritte Spieler wäre ein Croupier des Spielbetriebs. Für Casinos sind nur Spiele geeignet, die auf lange Sicht Gewinn versprechen.

Spielt man mit realen Würfeln oder im Einzelspielmodus des Simulationsprogramms, so findet man gravierende Ausreißer gemessen an langfristig angelegten Simulationen. Das könnte interessant sein für die Spielbankeignung.

Weitere Fragestellungen können sich aus dem Ausprobieren von Wegnahmeregeln ergeben. Es lohnt sich z.B. einen Spieler so wegnehmen zu lassen, dass der Pool aus dieser Spielersicht nicht 3-7 erreichen wird. Dann wären für den nachfolgenden Spieler die wahrscheinlichsten Gewinnzahlen gesperrt. Das gibt einen Hinweis für die Güte des Spiels als Abzocke durch Straßengangs: Zwei nicht erkennbar zusammengehörende Personen suchen sich eine Dritte; der vor dem Dritten Spielende blockiert die niedrigen Poolzahlen, wenn es geht!

Beim Simulieren kleiner Serien und beim realen Spielen vermittelt das Spiel die übliche Bandbreite: Man kann in einer Zeiteinheit individuell ordentlich verlieren bzw. gewinnen. Langfristig ist Mang Kung aber ein nivellierendes Spiel.

6 Theoretische Überlegungen

Ich beziehe mich primär auf das *Ur-Spiel mit drei Spielern und sechs Würfeln*, werde aber ggf. Belege aus anderen Situationen angeben. Für alle anderen Fälle sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Simulationsprogramm einzusehen.

Auffällig sind die Simulationsergebnisse, die im Idealfall dazu führen, dass …

- 20 Würfe pro Spiel
- ca. 21 Einheiten pro gewonnenem Spiel
- gleich viel gewonnene Spiele

erwartet werden. Dabei sollte mit der Standardeinstellung simuliert worden sein.

Der Spielverlauf wird durch Differenzen bestimmt: Bevor es an den Spielgewinn geht, kann entnommen oder muss eingezahlt werden. Das hängt jeweils von den **aktuellen Differenzen** ab. Am Beispiel eines 4er-Mang-Kung wird dieses in Tabelle 3 erläutert (ein 6er-Mang-Kung wäre darstellungstechnisch hier zu groß).

P/AS	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10	g	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
9	-1	g	8	7	6	5	4	3	2	1	
8	-2	-1	g	7	6	5	4	3	2	1	
7	-3	-2	-1	g	6	5	4	3	2	1	
6	-4	-3	-2	-1	g	5	4	3	2	1	
5	-5	-4	-3	-2	-1	g	4	3	2	1	
4	-6	-5	-4	-3	-2	-1	g	3	2	1	
3	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	g	2	1	
2	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	g	1	
1	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	g	
0											

Tab. 4**:** Gewinn- und Verlustfälle eines 4er Mang Kung (P Pool linke Spalte; AS Augensumme obere Zeile)

Der Pool kann als gegebene Situation akzeptiert und die Augensumme nach ihrer Wahrscheinlichkeit des Auftretens bewertet werden. Damit ist der Erwartungswert für einen *Mitnahmegewinn* mit 0,235 deutlich höher als für einen Einzahlungsverlust von -0,074; so bleibt **jedem Spieler** eine *mittlere Mitnahmeerwartung* von 0,161 Einheiten pro Wurf. Dann ist das **Spiel fair, weil dieser Wert für jeden Spieler gilt**. Für ein 6er-Mang-Kung beträgt diese Erwartung 0,18 Einheiten.

Die Differenz 0 – also der Spielgewinnfall – wurde ausgelassen, weil diese jetzt schlussfolgernd gesondert betrachtet werden kann.

Je Spiel werden 21 Einheiten in den Pool gelegt (6er Mang Kung); da das Spiel fair ist, erhält jeder Spieler im Mittel 7 Einheiten pro Spiel. Da aber nur ein Spieler gewinnt (also etwas bekommt), müssen im Mittel zwei Spieler die 7 Einheiten dem Gewinner zahlen. Da das offenbar gleichmäßig geschieht – also je Spieler in jedem dritten Spiel – muss auch die Anzahl gewonnener Spiele gleich sein und man gewinnt im Mittel 21 Einheiten – wenn man gewinnt.

Die mittlere Erwartung für einen Gewinn beträgt übrigens im Beispiel des 4er-Mang-Kungs 0,21 Einheiten, im 6er-Mang-Kung ein Sechstel der Einheit: ***Es handelt sich um ein faires Spiel.***

Bleibt noch die Wurfzahl (WZ) pro Spiel (W/S in Tabelle 2). Diese sollte natürlich u.a. von der Poolgröße zu Spielbeginn abhängig sein. Der Zusammenhang ist linear, wie die Simulation mit mehreren Spielern zeigt (6er Mang Kung):

$$WZ(p) = \frac{6}{21}p + 14$$, **p ← initiale Pooleinheiten**

Die anzunehmenden Werte stehen unter W/S in Tabelle 2.

Der Steigungsterm $\frac{6}{21}$ ist leicht zu interpretieren. Er führt zu einem Anstieg von 6 Spielen je 21 Einsatzeinheiten. Für x > 21 heißt es, diese $x \cdot 21$ Einheiten abzuarbeiten bis man wieder am Basisspiel mit 21 Einheiten angekommen ist; nur in diesem Bereich gibt es direkte Gewinnmöglichkeiten. Unter dem Erwartungswert von 3,5 Einheiten je Wurf ergeben sich im Mittel $6 \cdot 3{,}5 = 21$ Einheiten. Also sind im Mittel 6 Würfe nötig, um 21 Einheiten abzubauen. Diese Gesetzmäßigkeit findet man auch für Mang-Kung-Arten mit anderen Augensummen; allgemein gilt für die Spieldauer (Wurfzahl bis zum Sieg) ein linearer Term der Art

$$WZ(p) = \frac{6}{AS} \cdot p + n$$, AS Augensumme.

Wegen der u.a. Erwartungswerte E(X), X = Augensumme, gibt es tatsächlich bei jedem Spiel **im Mittel 6 Würfe**, um die Augensumme des Pools (p Einheiten) einmal abzuräumen. Die Tabelle 5 gibt die Werte für n und die *Erwartungswerte der Augensummen* E(X) wieder.

	3W	4W	5W	**6W**	7W	8W
n	7	9	12	**14**	16	19
E(X)	1	1,9	2,5	**3,5**	(4,7)	(6)

Tab. 5: n-Werte der linearen WZ-Gleichungen; in Klammern: voraus berechnete Werte (*n*W ← Würfelzahl); X = Augensumme; die Werte sind Simulationen entnommen.

Für die Basis-Situation (6 Würfel, 3 Spieler) mit 21 Einheiten lautet die mittlere Spiellänge 6+14; die 6 steht wieder für das „Abräumen" der 21 Einheiten. 14 bzw. n Würfe wogt das Spiel im Schnitt hin und her, bis es zu einem Gewinn kommt. Es handelt sich also um eine mittlere Wurfzahl, um die das direkte Abräumen schwankt. Diese erhöht sich von Würfelanzahl zu Würfelanzahl um 2 bis 3 Einheiten (Simulation).

Die n-Folge in Tab. 5 genügt der Vorschrift

$$n = 2 \cdot w + \text{int}\left(\frac{w}{3}\right)$$, w Anzahl Würfel,

int( ) als Funktion „nächste Ganzzahl"; d.h. n ist nur abhängig von der Würfelzahl. Das bedeutet wiederum – logisch –, dass die mittlere Schwankungsbreite um das direkte Abräumen größer wird, je mehr Würfel die maximale Augensumme bilden.

Der **Steigungswert** der linearen Spieldauerfunktion ist damit **theoretisch belegbar**, der n-Wert bisher *nur vorhersagbar*.

7 Begabtenförderung

Das Spiel bietet ein enormes Potential für die Begabtenförderung. Fast alle Fragestellungen beruhen zunächst auf Simulationen. Begabte können sich auf die Suche nach Begründungen, Formalisierungen oder gar Beweisen machen (die ich auch noch nicht gefunden habe).

Auch die folgerichtige Untersuchung anderer Mang-Kung-Varianten mit mehr oder weniger als 6 Würfeln kann angeregt werden. Für eine Variante bis zu 8 Würfeln gibt es beim Autor auch das Material der 8 Würfel (inklusive der Simulations-Software).

8 Beispielaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind Modelle für Hausaufgaben, Unterrichtsaufträge oder Klassenarbeiten.

1. Beschreibe, wie man das Spiel mit einer Urne spielen könnte. (HA nach der ersten Stunde zu Mang Kung und differenziert nach Mang Kung Variationen)
2. Begründe die theoretische Wsk für die Augensumme 12 (12 ist beliebig !)
3. Nimm an, dass es ein Mang Kung mit 3 [4,5] Würfeln der Mang-Kung-Art gibt. Entwickle die möglichen Augensummen und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.
4. Begründe für ein Mang-Kung mit 4 [3,5] Würfeln die Poolgrößen bzw. die Spielereinsätze für 3 bis 9 Spieler.
5. Übertrage Mang Kung wie folgt auf normale Würfel: 3 Spieler zahlen 6 Einheiten ein und werfen dann 3 normale Würfel. Es gelten die o.a. Mang-Kung-Regeln des Gewinnens, der Entnahme und des Einzahlens.

9 Das Simulationsprogramm

Das Simulationsprogramm (Menge 2007) bietet Ihnen umfängliche Möglichkeiten, die Spiel-Daten zu variieren.

Sie können damit …

- die Wahrscheinlichkeitsverteilung simulieren und damit die Basis der Spielsimulation kritisch beurteilen.
- Einzelspiele und ganze Spielserien simulieren…
- die Spielerzahl variieren (3-9).
- Regeln ausprobieren.
- die Mang-Kung-Art variieren (3-8 Würfel).
- den Modus für die AS variieren: Würfel bzw. Urne; Untersuchungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung sind möglich.

Das **PC-Programm wird weiter entwickelt,** um zusätzlich erkannte Situationen simulieren zu können. Anregungen der Benutzer sind jederzeit willkommen (s. Verfasser-Daten).

10 Formale Algorithmen

Ein zentrales Anliegen des Originalartikels war es bereits, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen formal algorithmisch zu ermitteln und nicht wie hier in einem arbeitsteiligen Verfahren anhand von *Richtlinien* für eine jüngere Schülergruppe. Natürlich sind rekursive (und damit auch iterative) Algorithmen möglich; diese führen hier jedoch von der allgemeinbildenden Sache weg. Die Verteilungen können bequem algorithmenfrei angegeben werden. Gerade dieser Aspekt rückt das Thema aber wieder in Richtung Begabtenförderung. Weiterhin können formale Algorithmen den Informatikunterricht bereichern.

Literatur

Wai-Sum Chan: Mang Kung Dice Game“ in: Teaching Statistics 18 (1996)2, S.42-44; übersetzt von Klaus Krug Stochastik in der Schule 1/97, S.34-40;

Siehe auch unter www.mathe.leprax.de

Jan-J. Menge, Simulationsprogramm zum Mang-Kung-Spiel, 2007; zu erhalten unter www.janmenge.de

Ich kann vermuten, dass dieses Spiel weitere Abhandlungen geliefert hat; diese wären jedoch auf chinesisch geschrieben worden und sind mir deshalb nicht zugänglich. Ein Experte informierte u.a., dass Mang Kung in den chinesischen Schriftzeichen bereits vielfältig sei und damit in dieser mathematischen Bedeutung schlecht aufzufinden sei.

Anschrift des Verfassers:

OStR Jan-Jürgen Menge
Ratsgymnasium Rotenburg (Wümme)
Gerberstr.14
27356 Rotenburg (Wümme)
Jan.menge@t-online.de