Ein Vier-Schritt-Modell zur Lösung von Kombinatorik-Aufgaben

Martin J. Sauer, Münster

***Zusammenfassung**: Im Folgenden wird ein transparentes, durch einen semantischen Zugang geprägtes Vier-Schritt-Modell vorgestellt, welches die Lösung gewisser Kombinatorik-Aufgaben durch selbstständiges Bearbeiten erleichtern kann; dieses Modell wird an Beispielen erläutert.*

1 Einleitung

Innerhalb des Stochastik-Unterrichts in der Schule (insbesondere in den Stufen 9/10 des Gymnasiums und der Sekundarstufe II), aber auch innerhalb von Übungen zu Vorlesungen zur Elementaren Stochastik und Seminaren zur Didaktik der Stochastik in der Lehrerausbildung, taucht immer wieder das Problem auf, kombinatorische Fragestellungen korrekt zu lösen.

Auch dem mit der Materie Vertrauten wird es nicht immer ganz leicht fallen, zu gegebenen Kombinatorikaufgaben ad hoc eine Lösung anzugeben. Zu Beginn einige Beispiele:

Aufgabe 1: Der Leiter eines Prüfungsamtes muss 146 (vom Erstgutachter korrigierte) Klausuren einer Abschlussprüfung auf vier Prüfer (zwecks Erstellung eines Zweitgutachtens) verteilen. Da die Prüfer durch andere Prüfungen verschieden stark ausgelastet sind, wird Folgendes vereinbart: Es soll Prüfer 1 genau 53 Klausuren, Prüfer 2 genau 37 Klausuren, Prüfer 3 genau 20 Klausuren, Prüfer 4 genau 36 Klausuren begutachten.

Wie viele Möglichkeiten der Verteilung der Klausuren auf die vier Prüfer gibt es?

Aufgabe 2: Eine Limonadenfirma bietet ihre Limonade in genau vier Geschmacksrichtungen an.
Der Chef des Getränkemarktes stellt sich folgende Frage: Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat ein Kunde, eine 24-Flaschen-Kiste mit Limonadeflaschen dieser Firma zu füllen?

Aufgabe 3: Stellen Sie sich vor, Sie müssten innerhalb der zweiwertigen Aussagenlogik eine Wahrheitstafel für eine gewisse Verknüpfung von vier Aussagen *A, B, C, D* aufstellen. Wie viele Zeilen würde diese Wahrheitstafel umfassen?

Aufgabe 4: Vier Tagungsteilnehmer fragen bei einem Tagungshotel nach Einzelzimmern an. Der Hotelier hat noch acht freie Einzelzimmer. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die vier Hotelgäste auf die acht Einzelzimmer zu verteilen? Dabei ist es dem Hotelportier wichtig zu wissen, welcher Gast welches Zimmer belegt.

Ziel dieses Artikels ist es, als didaktisches Werkzeug zur Lösung von gewissen Kombinatorik-Aufgaben ein 4-Schritt-Modell zu präsentieren, welches sehr stark durch einen inhaltlichen Zugang geprägt ist: Zu der Lösung einer gegebenen Kombinatorik-Aufgabe gelangt man, indem man sukzessive bei jedem dieser Schritte gewisse Arbeitsaufträge mittels sachorientierter Überlegungen bearbeitet.

In **Kapitel 2** wird zur Orientierung eine knappe Übersicht über *Kombinatorik-Figuren* gegeben: Als mathematische Grundlage werden in einer knappen Sachanalyse diese Figuren kurz vorgestellt und die für sie in der Literatur benutzten verschiedenen Bezeichnungen angegeben.

Anschließend werden drei unterschiedliche didaktische Positionen bezüglich der Lösung von Kombinatorik-Aufgaben besprochen. Im letzten Teil des Kapitels wird schließlich kurz auf einen inhaltlichen Aspekt bei Kombinatorik-Aufgaben eingegangen.

In **Kapitel 3** wird das angesprochene 4-Schritt-Modell präsentiert. Die ersten drei Schritte sind gänzlich auf der inhaltlichen Ebene angesiedelt, d. h., sie kommen völlig ohne den mathematischen Kalkül aus (welcher erst im vierten Schritt zum Tragen kommt). Die Schrittfolge des Modells wird dann an Beispielen verdeutlicht; die Grenzen der Benutzbarkeit des Modells werden diskutiert.

2 Kombinatorik-Figuren und Kombinatorik-Aufgaben

2.1 Vier Grundfiguren der Kombinatorik

Ausgangspunkt bei kombinatorischen Fragestellungen ist immer eine endliche Menge *M*, aus deren Elementen man endliche Zusammenstellungen von Elementen aus *M* bildet. Formal gesprochen bedeutet das: Ist $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine beliebige Menge mit n Elementen, so bildet man endliche Zusammenstellungen von Elementen von *M*.

Wir wollen solche Zusammenstellungen von k Elementen aus M als **Zusammenstellungen der Länge k** oder (wie üblich) als **Stichproben der Länge k** bezeichnen.

Der Einfachheit halber sei im Folgenden unsere Grundmenge immer durch $M = \{1,\dots,n\}$ gegeben.
Falls $k > n$ ist, gibt es in allen zugehörigen Stichproben der Länge k Wiederholungen von Elementen aus M.

Falls $k \le n$ ist, können (müssen aber nicht) in einer zugehörigen Stichprobe der Länge k Wiederholungen von Elementen aus M auftauchen.

Um Ordnung in die Vielzahl der möglichen Stichproben zu einer beliebig vorgegebenen Zahl $k\in$ ($k \ge 2$) zu bringen, stellt man die beiden Basisfragen der Kombinatorik:

(K1) Darf es in der Stichprobe Wiederholungen von Elementen geben? (ja/nein)

(K2) Ist die Reihenfolge der Elemente der Stichprobe zu beachten? (ja/nein)

Die Beantwortungen dieser beiden Grundfragen determinieren vier Fälle, welche in dem folgenden Schema zusammengefasst sind.

(mW|Rb)	(oW|Rb)
(mW|Rnb)	(oW|Rnb)

Die Bedeutung dieser Abkürzungen ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

(mW|Rb)	Stichproben, bei denen sich Elemente wiederholen dürfen und die Reihenfolge der Elemente zu beachten ist.
(oW|Rb)	Stichproben, bei denen sich Elemente nicht wiederholen dürfen und die Reihenfolge der Elemente zu beachten ist.
(mW|Rnb)	Stichproben, bei denen sich Elemente wiederholen dürfen und die Reihenfolge der Elemente nicht zu beachten ist.
(oW|Rnb)	Stichproben, bei denen sich Elemente nicht wiederholen dürfen und die Reihenfolge der Elemente nicht zu beachten ist.

Bezogen auf die Grundmenge $M = \{1,\dots,n\}$ lassen sich in jedem dieser vier Fälle die Mengen von Stichproben der Länge k übersichtlich notieren:

Im Fall (mW|Rb):

$$\Omega_1 = \left\{(a_1,\dots,a_k)\,\middle|\, a_i \in \{1,\dots,n\}, 1 \le i \le k\right\},$$

im Fall (oW|Rb):

$$\Omega_2 = \left\{(a_1,\dots,a_k)\,\middle|\, a_i \in \{1,\dots,n\}, 1 \le i \le k,\ a_i \ne a_j \ \textit{für } i \ne j\right\}$$

im Fall (mW|Rnb):

$$\Omega_3 = \left\{(a_1,\dots,a_k)\,\middle|\, a_i \in \{1,\dots,n\}, 1 \le i \le k,\ a_i \le a_j \ \textit{für } i < j\right\}$$

im Fall (oW|Rnb):

$$\Omega_4 = \left\{(a_1,\dots,a_k)\,\middle|\, a_i \in \{1,\dots,n\}, 1 \le i \le k,\ a_i < a_j \ \textit{für } i < j\right\}$$

Bei den Fällen (mW|Rnb) und (oW|Rnb) sind k-Tupel notiert, deren Einzeleinträge nach Größe sortiert sind – und zwar aufsteigend. Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass man Zahlen, wenn die Reihenfolge nicht wichtig ist, im Normalfall der Größe nach anordnet.

In jedem dieser vier Fälle gibt es wohlbekannte Formeln zur Bestimmung der jeweiligen Anzahl von Stichproben der Länge k.

Figur (mW|Rb): $|\Omega_1| = n^k$

Figur (oW|Rb): $|\Omega_2| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Figur (mW|Rnb): $|\Omega_3| = \dbinom{n+k-1}{k}$

Figur (oW|Rnb): $|\Omega_4| = \dbinom{n}{k}$

Beweise für die Formeln für die einzelnen Kombinatorik-Figuren findet man etwa bei Kütting/Sauer (2008, Kapitel II 6.3).

Für den Leser kann es nützlich sein, wenn die unterschiedlichen Bezeichnungen, welche in der Literatur für diese vier Figuren benutzt werden, innerhalb einer kurzen Liste gegenübergestellt werden.

Figur / Notation	(mW|Rb)	(oW|Rb)	(mW|Rnb)	(oW|Rnb)
Notation I	Permutationen mit Wiederholung	Permutationen ohne Wiederholung	Kombinationen mit Wiederholung	Kombinationen ohne Wiederholung
Notation II	Geordnete Stichproben mit Zurücklegen	Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen	Ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen	Ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen
Notation III	Variationen mit Wiederholung	Variationen ohne Wiederholung	Kombinationen mit Wiederholung	Kombinationen ohne Wiederholung

Ein Beispiel für die Benutzung der Notationsform I liefert Henze (2008, Kapitel 8). Sowohl Engel (1987, Abschnitt 0.3.4) als auch Kütting/Sauer (2008, Kapitel II 6.3) bedienen sich der Notationsform II. Sehr nahe an Notationsform II ist auch Krengel (2003, § 1.2): Er benutzt die Termini „in/ohne Reihenfolge mit/ohne Zurücklegen". Sowohl Ineichen (1984, Teil 3, Kapitel 1) als auch Selter/Spiegel (2004) arbeiten mit der Notationsform III; das Lexikon für Stochastik erläutert die Kombinatorik ebenfalls mittels der Notationsform III (Müller 1991, Artikel *Kombinatorik*).

Man erkennt, dass es keine kanonische Notationsform für die obigen vier Kombinatorik-Figuren gibt. Das ist sicherlich aus didaktischer Sicht kein angenehmer Status, denn Schüler bzw. Studierende, welche die Inhalte der Kombinatorik nach dem einen Werk mit Notation X gelernt haben, werden möglicherweise in gewisse Verwirrung gestürzt, wenn sie die Inhalte der Kombinatorik in einem anderen Werk mit Notation Y nachschlagen.

Zur Modellierung der vier Grundfiguren der Kombinatorik werden im Allgemeinen zwei Modelle benutzt:

- Urnenmodell: In einer Urne befinden sich n Kugeln (also $K_1,\dots,K_n$); es wird k mal gezogen. Die Fragen lauten dann: Erfolgt das Ziehen einer Kugel mit oder ohne Zurücklegen? Ist die Reihenfolge der gezogenen Kugeln zu beachten oder nicht zu beachten?
- Alphabetmodell: Es gibt n Zeichen (also $Z_1,\dots,Z_n$) und k Plätze, auf denen k dieser n Zeichen platziert werden sollen. Die Fragen lauten dann: Darf es Wiederholungen von Zeichen geben oder nicht? Ist die Reihenfolge der Zeichen zu beachten oder nicht zu beachten?

2.2 Eine weitere Kombinatorik-Figur

Oft wird in der Literatur noch eine weitere Kombinatorik-Figur explizit herausstellt.

Bei dieser Figur stellt sich die Ausgangslage etwas anders dar: Gegeben ist eine Grundmenge $M = \{Z_1,\dots,Z_n\}$ mit n Elementen (man spricht auch von Zeichen), und man möchte nun zu einer beliebig vorgegebenen Zahl $k \in (k \geq 2)$ aus den Elementen von M Stichproben der Länge k bilden – allerdings unter der Voraussetzung, dass in einer solchen Stichprobe die Elemente aus M mit <u>vorgegebenen</u> Vielfachheiten auftreten sollen und die Summe dieser Vielfachheiten genau gleich k sein soll.

Formal gesprochen: Man gibt eine Menge $M = \{Z_1,\dots,Z_n\}$ mit n Zeichen, eine Zahl $k \in (k \geq 2)$ und Zahlen $k_i \in (k_i \geq 1,\ 1 \leq i \leq n)$ vor – wobei die Zahlen k_i die Vielfachheiten der Zeichen Z_i angeben und $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$ gelten muss. Dann sollen – unter diesen Bedingungen – Stichproben der Länge k betrachtet werden, in denen die Zeichen Z_i eben genau k_i mal vorkommen sollen.

Es gilt, dass die Anzahl solcher Stichproben genau $\frac{k!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ ist.

Die Herleitung dieser Formel geschieht üblicherweise mittels der Formeln von anderen Kombinatorik-Figuren; in Kütting/Sauer (2008, Kapitel II 6.4) werden zwei Wege beschrieben – zum einen durch Benutzung der Figur (oW|Rb), zum anderen durch Benutzung der Figur (oW|Rnb).

Ein bekanntes Beispiel zu solchen Stichproben ist eine Aufgabenstellung zum Skatspiel: Man fragt nach der Anzahl der Möglichkeiten, zu Beginn eines Spiels die 32 Karten auf die drei Spieler A, B, C und den „Stock" S zu verteilen.

Die Grundmenge ist hier $M = \{A, B, C, S\}$.

Es gibt 32 „Plätze“, nämlich die 32 Karten
Kreuz-As	…	Kreuz-Sieben
Pik-As	…	Pik-Sieben
Herz-As	…	Herz-Sieben
Karo-As	…	Karo-Sieben

Aus den Elementen von M müssen also Stichproben der Länge $k = 32$ gebildet werden, wobei die Vielfachheit der Elemente A, B, C jeweils 10 ist (d. h. $k_1 = k_2 = k_3 = 10$) und die Vielfachheit von S gleich 2 ist (d. h. $k_4 = 2$). Es ist offenbar

$$\sum_{i=1}^{4} k_i = 32.$$

Die Anzahl der Ausgangskonfigurationen beim Skatspiel ist somit

$$\frac{32!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 2!} = 2.753.294.408.504.640.$$

Zur Modellierung dieser weiteren Figur der Kombinatorik werden im Allgemeinen ebenfalls die erwähnten zwei Modelle (Urnenmodell, Alphabetmodell) benutzt – und zwar mit den nachfolgenden Modifikationen:

- Urnenmodell: In der Urne befinden sich k Kugeln aus n Kugelsorten, wobei Kugeln der gleichen Sorte gleich beschriftet sind – und zwar gibt es k_i $(k_i \geq 1)$ Kugeln der Sorte i, wobei $1 \leq i \leq n$, und es gilt $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$. Aus dieser Urne werden nacheinander alle Kugeln (ohne Zurücklegen) gezogen.
- Alphabetmodell: Man hat n Zeichen, aus denen Wörter der Länge k gebaut werden sollen (wobei das Zeichen i mit der Vielfachheit k_i $(k_i \geq 1 \text{ und } 1 \leq i \leq n)$ vorkommen soll und $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$ gelten muss.

Wenn diese Kombinatorik-Figur in der Literatur behandelt wird, wird sie üblicherweise mit dem Namen *Permutationen mit Wiederholungen* bezeichnet, etwa im Lexikon für Stochastik (Müller 1991, Artikel *Kombinatorik*) und bei Selter und Spiegel (2004).

Damit kann es an dieser Stelle terminologisch recht kompliziert werden: Der Terminus *Permutationen mit Wiederholungen* ist nicht verträglich mit der Notationsform I, denn wenn man für die ersten vier Kombinatorik-Figuren die Notationsform I benutzt, so ist dieser Terminus ja bereits für die Figur (mW|Rb) reserviert.

In der erwähnten Literatur, die diese Kombinatorik-Figur (also *Permutationen mit Wiederholungen*) behandelt, wird deshalb auch die Notationsform III benutzt. (Dadurch, dass dieser Name *Permutationen mit Wiederholungen* bei unterschiedlichen Autoren unterschiedliche Bedeutung hat (je nachdem ob Notationsform I oder Notationsform III benutzt wird), kann bei Schülern bzw. Studierenden durchaus eine gewisse Begriffsverwirrung entstehen – nämlich dann, wenn sie zwei Bücher benutzen oder zwei Lehrende haben, welche die unterschiedlichen Notationsformen I und III benutzen.)

Benutzt man für die ersten vier Kombinatorik-Figuren die in Kapitel 2.1 vorgeschlagenen Bezeichnungen und möchte die erwähnte weitere Kombinatorik-Figur in die Betrachtungen mit einbeziehen, kann man die Stichproben dieser weiteren Figur nun – um einheitliche inhaltsbezogene Bezeichnungen zu haben – als *Stichproben, bei denen sich die Elemente mit vorgegebenen Anzahlen wiederholen,* bezeichnen; als Namenskürzel bietet sich (mW|vA) an, wobei mW „mit Wiederholungen“ und vA „vorgegebene Anzahlen“ bedeutet.

(mW|vA)	Stichproben, bei denen sich die Elemente mit vorgegebenen Anzahlen wiederholen.

Eine weitere Bemerkung: Bei der Kombinatorik-Figur (oW|Rb) kann (und muss) man den Spezialfall $k = n$ betrachten, d. h., es geht bei diesem Spezialfall um Stichproben, die <u>aus allen</u> Elementen der Grundmenge (ohne Wiederholung dieser Elemente) bestehen. Bildlich gesprochen geht es um die Anordnungen von n unterscheidbaren Objekten auf n Plätzen. In diesem Fall wird in der Literatur von *Permutationen ohne Wiederholungen* gesprochen – etwa im Lexikon für Stochastik (Müller 1991, Artikel *Kombinatorik*) und bei Selter und Spiegel (2004).

Es wird hier dafür plädiert, dieser (wenn man will: sechsten) Kombinatorik-Figur keinen eigenen Namen zu geben, sondern sie immer als einfachen Spezialfall der Figur (oW|Rb) zu sehen.

Hinweis:

Im nachfolgenden Text wird sowohl auf die vier Basisfiguren der Kombinatorik (Kapitel 2.1) als auch die angesprochene weitere Kombinatorik-Figur (Kapitel 2.2) Bezug genommen. Zur Abkürzung werden dabei nur noch die <u>Kurzformen der Namen dieser Kombinatorik-Figuren</u> verwandt, also:

(mW|Rb)
(oW|Rb)
(mW|Rnb)
(oW|Rnb)
(mW|vA)

2.3 Die Lösung von Kombinatorik-Aufgaben im Unterricht

Generell sind in der Mathematik-Didaktik zwei sehr unterschiedliche Konzeptionen zur Lösung gegebener Kombinatorik-Aufgaben vertreten worden.

Gegenwärtiges Konzept: Nutzung fundamentaler Ideen/Strategien [Methode 1]

Diese Methode vertritt den Standpunkt, dass zur Lösung gegebener Kombinatorik-Aufgaben ein Grundstock von drei Fundamentalprinzipien ausreichend ist. Diese Basisprinzipien seien einleitend kurz genannt (siehe dazu etwa auch Hefendehl-Hebecker/Törner [1984, Kapitel 3].

(1) Allgemeines Zählprinzip (AZP)

Sind $A_1,\dots,A_n$ endliche Mengen, so gilt $|A_1\times\dots\times A_n| = |A_1|\cdot\ldots\cdot|A_n|$.

Diese Regel wird wie folgt genutzt:

Besteht ein Zufallsexperiment aus n Teilexperimenten, die nacheinander und unabhängig voneinander ausgeführt werden, und gibt es k_i mögliche Ergebnisse bei Teilexperiment i (wobei $1\le i\le n$), so hat das Zufallsexperiment insgesamt $k_1\cdot\ldots\cdot k_n$ mögliche Ergebnisse.

Dieses Prinzip wird oft auch Produktregel genannt.

(2) Identifikationsregel (IR)

Seien A und B zwei endliche Mengen und sei $f: A\to B$ eine surjektive Abbildung mit $f^{-1}(y)=c$ für jedes $y\in B$, dann gilt $|B|=\frac{|A|}{c}$.

Ein schönes Beispiel für die Nutzung dieser Regel ist die Herleitung der Formel zur Figur (oW|Rnb):
Hier ist A die Menge der Stichproben vom Umfang k, bei denen sich die Elemente nicht wiederholen dürfen und die Reihenfolge der Elemente zu beachten ist. Es gilt [Formel für Figur (oW|Rb)]: $|A|=\frac{n!}{(n-k)!}$.

Man ist interessiert an der Mächtigkeit der Menge B, die aus solchen Stichproben vom Umfang k besteht, bei denen sich die Elemente nicht wiederholen dürfen und die Reihenfolge der Elemente nicht zu beachten ist. Da bei den Tupeln aus B die Reihenfolge der Elemente nicht von Interesse ist, müssen jeweils alle in A liegenden $k!$ Reihenfolgen der Elemente eines solchen Tupels aus B identifiziert werden. Die Abbildung f bildet also alle in A liegenden $k!$ Reihenfolgen der Elemente eines solchen Tupels aus B auf dieses Tupel aus B ab. Das bedeutet: Es muss durch $k!$ dividiert werden. Also

$$|B|=\frac{|A|}{k!}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}=\binom{n}{k}.$$

Diese Regel wird (wegen des Vorgangs des Teilens) auch Quotientenregel genannt.

(3) Summenregel

Sind $A_1,\dots,A_n$ paarweise disjunkte endliche Mengen, so gilt $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i|$.

Dieses Prinzip ist immer anwendbar, wenn eine gegebene Kombinatorik-Aufgabe in mehrere sich gegenseitig ausschließende, aber jeweils in sich vollständige Teilaufgaben zerlegt werden kann.

Der Nutzen dieser drei Prinzipien ist offensichtlich: Schon zwei dieser Prinzipien reichen aus, um die Formeln zu vier der oben genannten Kombinatorik-Figuren zu beweisen.

Hier eine Übersicht:

Kombinatorik-Figur	Beim Beweis benutzte Prinzipien
(mW|Rb)	AZP
(oW|Rb)	AZP
(mW|Rnb)	Codierung + IR
(oW|Rnb)	IR
(mW|vA)	IR (mehrfach)

Die Grundfiguren der Kombinatorik ergeben sich also als Spezialfälle der genannten Fundamentalprinzipien.

Einzig bei der Herleitung der Formel für die Figur (mW|Rnb) braucht man zusätzlich noch ein gewisses Codierungsverfahren (siehe etwa Kütting/Sauer [2008, Kapitel II 6.3]).

Die didaktische Idee bei dieser Methode 1 liegt darin (Hefendehl-Hebecker/Törner [1984, 247]), dass die drei genannten Prinzipien als primäre übergeordnete Grundfähigkeiten zur Lösung beliebiger Kombinatorik-Aufgaben gesehen werden: Mit ihrer Hilfe kann – mit Ausnahme von Aufgaben, die zur Kombinatorik-Figur (mW|Rnb) führen, – jede gegebene Kombinatorik-Aufgabe gelöst werden. Bezüglich der Figur (mW|Rnb) gilt, dass sie entweder separat behandelt werden kann oder ganz weggelassen werden kann.

Beim Unterricht zur Kombinatorik bilden die Grundfiguren der Kombinatorik also nicht die Grundlage, sondern treten (bis auf [mW|Rnb]) als wichtige Spezialfälle der genannten Prinzipien auf.

Klassisches Konzept: Behandlung der Grundfiguren der Kombinatorik [Methode 2]

Die klassische Behandlung der Kombinatorik-Figuren folgt der Notation III: Es werden sechs Grundfiguren behandelt (Variationen, Kombinationen, Permutationen jeweils mit und ohne Wiederholung) und anschließend solche Aufgaben gestellt, die direkt zu einer dieser sechs Grundfiguren führen. Die drei bei Methode 1 angesprochenen Prinzipien sind hier lediglich Hilfsmittel zur Gewinnung der Formeln zu den Kombinatorik-Figuren und sind nicht wie bei Methode 1 die übergeordneten Grundprinzipien (Grundfähigkeiten).

Aus didaktischer Sicht ist Methode 2 klar abzulehnen. Wie Hefendehl-Hebecker/Törner (1984, 247) konstatieren und belegen, ist dieser Weg „fachlich gesehen antiquiert und prägt sich zudem nicht leicht ein".

In diesem Artikel wird die Möglichkeit erwogen, einen dritten Weg zu gehen. Bei dieser Konzeption geht es darum, im Unterricht

- deutlich die genannten drei Fundamentalprinzipien herauszustellen und zur Lösung von solchen Aufgaben, die nicht direkt zu den Grundfiguren führen, zu nutzen,
- die Grundfiguren der Kombinatorik zu behandeln – aber nicht die sechs bei Methode 2 genannten Figuren, sondern nur fünf dieser Figuren (siehe Kapitel 2.1 und 2.2),
- für die behandelten fünf Figuren inhaltsbezogene (bedeutsame), sich leicht einprägende Bezeichnungen zu nehmen.

Falls im Unterricht (sei es in der Schule oder in der Lehrerausbildung) dieser dritte Weg gegangen wird, kann das nachfolgend in Kapitel 3 angegebene 4-Schritt-Modell zur Lösung von solchen Kombinatorik-Aufgaben, welche direkt zu einer dieser fünf behandelten Grundfiguren führen, nützlich sein.

2.4 Die Praxisrelevanz von Kombinatorik-Aufgaben

„Ein Makel vieler Aufgaben besteht darin, dass sie nur scheinbar wirklichkeitsnah, im Grunde genommen aber unrealistisch sind." (Hefendehl-Hebecker/Törner [1984, 260]).

Diese Kritik trifft sicherlich schon auf die Aufgabe 1 der Einleitung zu: Die Frage ist berechtigt, ob die Lösung dieser Aufgabe überhaupt irgendjemanden (mit Ausnahme des Leiters des Prüfungsamtes) interessiert.

Man kann davon sprechen, dass hier eine mehr oder weniger künstliche Einkleidung der Lösungsformel für Aufgaben des Typs (mW|vA), vorliegt.

In jedem Fall müssen allzu künstliche Einkleidungen vermieden werden (wie sie etwa bei den folgenden Aufgaben vorhanden sind: „10 Bücher sollen zufällig auf 4 Schüler verteilt werden, wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?" oder „Wie viele Möglichkeiten gibt es für einen Trainer, die elf Spieler einer Fußballmannschaft auf den möglichen Spielpositionen einzusetzen?").

Eine solche Realitätsferne hemmt die Entwicklung einer positiven Einstellung bezüglich der Nützlichkeit von Mathematik; als Folge kann sich auf Schülerseite das Bild der Mathematik als eine weltfremde Wissenschaft verfestigen.
Bei der Auswahl der Aufgaben für den Unterricht sollte somit auch dieser inhaltliche Aspekt (also die Alltagsrelevanz von Aufgabenstellungen) berücksichtigt werden.

3 Das 4-Schritt-Modell zur Lösung von Kombinatorik-Aufgaben

Im vorliegenden Kapitel wird – wie angekündigt – ein 4-Schritt-Modell angegeben, das sich als eine mögliche Lösungsmethode bei der Bearbeitung von gewissen Kombinatorik-Aufgaben bewährt hat. Dieses Modell wird mittels Beispielen erläutert. Anschließend geht es um die praktische Anwendung dieses Modells im Unterricht.

Zwei Vorbemerkungen:

(1) Es sei noch einmal deutlich gesagt, dass das hier vorgestellte 4-Schritt-Modell dann im Unterricht (sei es in der Schule oder der Lehrerausbildung) zum Tragen kommen kann, wenn die fünf in Kapitel 2.1 und 2.2 besprochenen Kombinatorik-Figuren behandelt worden sind – und zwar etwa im Rahmen eines methodischen Konzepts, wie es am Ende von Kapitel 2.3 mit dem Vorschlag des Vollziehens eines dritten Weges angedeutet worden ist.

(2) Das vorgestellte 4-Schritt-Modell findet sich in Kurzform auch bei Kütting/Sauer (2008, Kapitel II 6.5). Anders als dort sollen hier auch Möglichkeiten und Grenzen bei der Anwendung des Modells in der Schule besprochen werden. Insbesondere soll hier deutlich gemacht werden, dass das 4-Schritt-Modell nur <u>eine Option</u> zur Lösung von Kombinatorik-Aufgaben ist und dass es selbstverständlich alternative Wege zur Lösung solcher Aufgaben geben kann.

3.1 Exploration einer Schrittfolge zur Lösung von Kombinatorik-Aufgaben

Schritt 1:

Notation von Stichproben-Beispielen

Hier geht es darum, für die in der Aufgabe gegebene Sachsituation selbstständig passende Stichproben (also konkrete der Aufgabenstellung genügende Ergebnisse) als spezielle Lösungen anzugeben. Damit wird die Basis für ein Verständnis der Aufgabenstellung gewonnen.

Schritt 2:

Klärung entscheidender Fragen

Dieser Schritt ist sehr wichtig. Es geht darum, die drei folgenden Basisfragen zu beantworten:

(K1) Sind in der Stichprobe Wiederholungen von Elementen erforderlich? (ja/nein)

(K2) Ist die Reihenfolge der Elemente der Stichprobe zu beachten? (ja/nein)

(K3) Sind Vielfachheiten von Elementen vorgegeben? (ja/nein)

Mithilfe dieser drei Grundfragen kann der folgende Entscheidungsbaum durchlaufen werden.

Start: Frage (K1).

(A) Falls die Antwort auf (K1) „nein“ ist, folgt Frage (K2).

(A.1) Falls die Antwort auf (K2) „ja“ ist, liegt die Kombinatorik-Figur (oW|Rb) vor.

(A.2) Falls die Antwort auf (K2) „nein“ ist, liegt die Kombinatorik-Figur (oW|Rnb) vor.

(B) Falls die Antwort auf (K1) „ja“ ist, folgt Frage (K3).

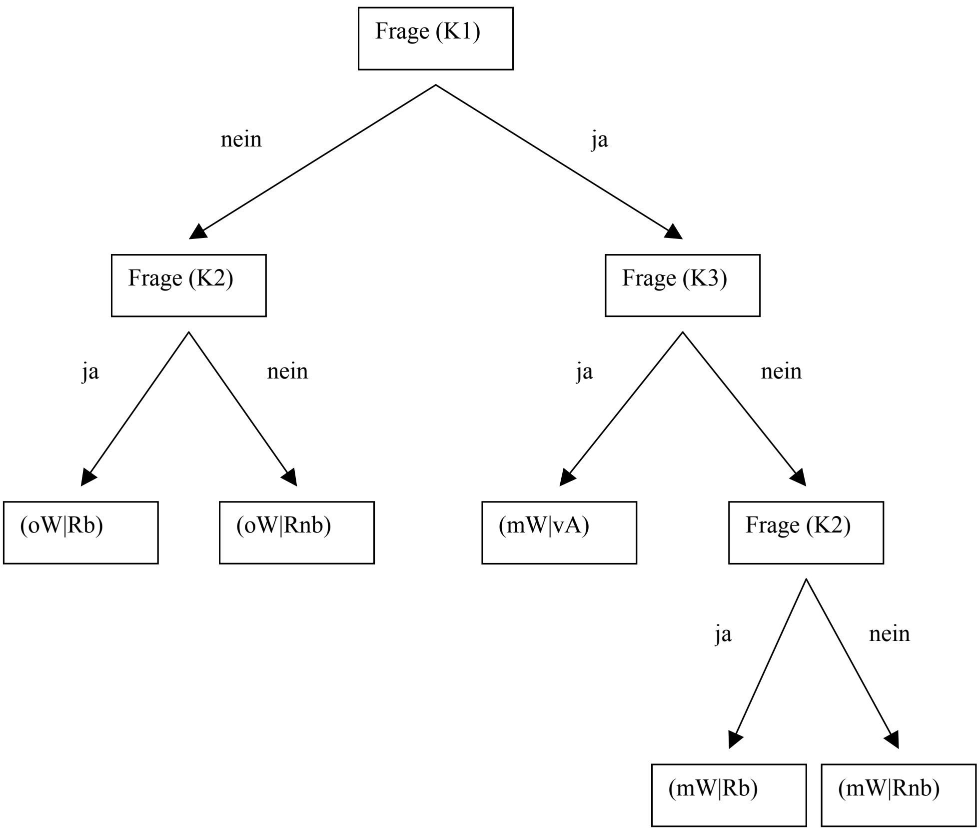
(B.1) Falls die Antwort auf (K3) „ja“ ist, liegt die Kombinatorik-Figur (mW|vA) vor.

(B.2) Falls die Antwort auf (K3) „nein“ ist, folgt die Frage (K2).

(B.2.a) Falls die Antwort auf (K2) „ja“ ist, liegt die Kombinatorik-Figur (mW|Rb) vor.

(B.2.b) Falls die Antwort auf (K2) „nein“ ist, liegt die Kombinatorik-Figur (mW|Rnb) vor.

Das Vorgehen bei Schritt 2 ist im nachstehenden Flussdiagramm übersichtlich veranschaulicht.



Schritt 3:
Übertragung in ein Modell

An dieser Stelle sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall I: Hat sich bei Schritt 2 eine der ersten vier Kombinatorik-Figuren [also eine der Figuren (mW|Rb), (oW|Rb), (mW|Rnb), (oW|Rnb)] ergeben, geht es jetzt darum, den gegebenen Sachverhalt in das Urnennmodell oder das Alphabetmodell zu übertragen, d. h. genauer: die Parameter n und k für die Formeln zu bestimmen.

Die Fragen nach Wiederholungen und Relevanz der Reihenfolge sind bereits bei Schritt 2 beantwortet worden. Deshalb stellen sich jetzt – in Abhängigkeit von der Wahl des vom Schüler/Studierenden gewählten Modells – allein die beiden folgenden Fragen:

Im Urnenmodell:

- Wie viele Kugeln befinden sich in der Urne?
- Wie oft wird gezogen?

Im Alphabetmodell:

- Wie viele Zeichen sind vorhanden?
- Wie viele Plätze stehen zur Verfügung?

Fall II: Hat sich bei Schritt 2 die Kombinatorik-Figur (mW|vA) ergeben, geht es jetzt darum, den gegebenen Sachverhalt in ein passendes Urnenmodell oder ein passendes Alphabetmodell zu übertragen, d. h. genauer: die Parameter n, k und k_i $(1 \le i \le n)$ für die Formel zu bestimmen.

In Abhängigkeit von der Wahl des vom Schüler/Studierenden gewählten Modells stellen sich die drei folgenden Fragen:

Im Urnenmodell:

- Wie viele Kugeln befinden sich in der Urne?
- Wie viele Kugelsorten sind vorhanden?
- Wie viele Kugeln pro Kugelsorte hat man?

Im Alphabetmodell:

- Wie viele Zeichen sind vorhanden?
- Welche Länge sollen die Wörter haben?
- Wie oft muss jedes Zeichen in einem Wort vorkommen?

Schritt 4:
Lösung der Aufgabe mittels des Kalküls

In diesem Schritt geht es nur noch darum, die Aufgabe mittels einer der zur Verfügung stehenden Formeln zu lösen:

Bei Schritt 2 hat man die Kombinatorik-Figur herausgefunden; bei Schritt 3 hat man

- im Fall I die Parameter n und k bestimmt;
- im Fall II die Parameter n und k und die gegebenen Vielfachheiten k_i bestimmt.

Folglich kann man nun direkt eine der in Kapitel 2 angegebenen Formeln zur Berechnung der gesuchten Anzahl benutzen!

Hinweis:

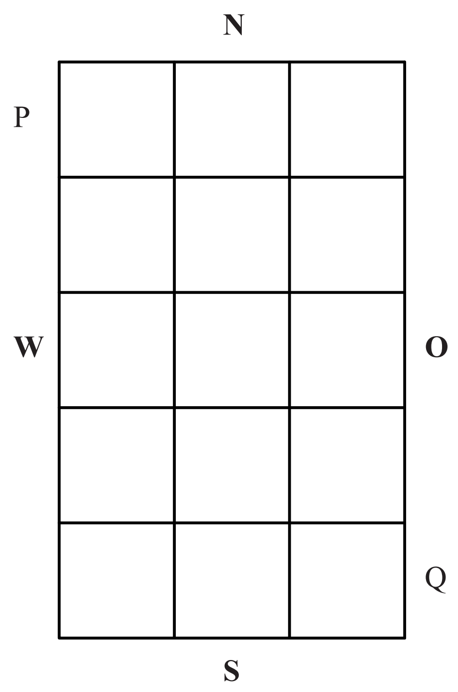
Natürlich hat man bei Schritt 1 schon implizit die Anzahl der Elemente der Grundmenge und auch implizit die Anzahl der Elemente einer Ergebnissequenz bestimmt. Insofern dient der Schritt 3 faktisch dazu, sich nun auch explizit das n (also die Anzahl der Elemente der Grundmenge) und das k (also die Anzahl der Elemente einer Stichprobe) und im Fall der Figur (mW|vA) die vorgegebenen Vielfachheiten klar zu machen. Nur durch diese explizite Angabe der entscheidenden Parameter mittels der Übertragung in eines der möglichen Modelle wird sichergestellt, dass es auch nicht zu Verwechslungen dieser Parameter n und k kommen wird.

3.2 Beispiele zur Erläuterung des 4-Schritt-Modells

Wir wollen nun das Vorgehen bei der Lösung von Kombinatorik-Aufgaben mittels dieses Vier-Schritt-Modells an zwei Beispielen demonstrieren und anschließend noch einige didaktische Hinweise zu den einzelnen Schritten des Modells geben.

Beispiel 1:

Gegeben sei der nachstehende Ausschnitt aus einem Stadtplan der gitterförmig angelegten Innenstadt von Mannheim. Wie viele Wege gibt es von P nach Q, wenn man an jeder Kreuzung nur nach Osten (**O**) oder nach Süden (**S**) gehen darf.



Lösungsweg 1:

Schritt 1:

Mögliche Wege sind etwa

OSSOSSOS
SSSSOOOS
OOOSSSSS
SOOSSSSO

Schritt 2:

Antwort auf Frage (K1): JA.

Es ist offensichtlich, dass Wiederholungen auftauchen. Somit haben wir Fall (B).

Antwort auf Frage (K3): JA.

Man erkennt, dass die Anzahlen der Zeichen „*O*" bzw. „*S*" durch den Stadtplanausschnitt determiniert sind: Für den Weg von P nach Q muss man „irgendwie" drei Mal nach Osten und fünf Mal nach Süden gehen. Damit hat man die Vielfachheiten k_1 = Vielfachheit von $O = 3$ und k_2 = Vielfachheit von $S = 5$ gegeben.

Also handelt es sich um die Kombinatorik-Figur (mW|vA).

Schritt 3: Man hat Fall II und entscheidet sich etwa für das Alphabetmodell.

Wir haben die Zeichen „*O*" bzw. „*S*" mit den Vielfachheiten $k_1 = 3$ bzw. $k_2 = 5$; mittels dieser Zeichen sollen Wörter der Länge $k = 8$ gebildet werden.

Schritt 4: Die Benutzung der Formel liefert:

Anzahl der möglichen Wege ist $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56.$

Lösungsweg 2:

Schritt 1:

Man macht sich klar, dass insgesamt 8 Entscheidungen bezüglich der einzuschlagenden Richtung getroffen werden müssen. Von diesen 8 Entscheidungen müssen genau 5 Entscheidungen für Süden sein (und die anderen 3 Entscheidungen müssen damit automatisch für Osten sein).

Wenn man diese Entscheidungen mit E1, …, E8 bezeichnet, hat man etwa folgende Stichproben-Beispiele für die 5 Süden-Entscheidungen:

E3 E4 E5 E7 E8
E1 E2 E3 E4 E5
E2 E4 E5 E6 E8

Schritt 2:

Antwort auf Frage (K1): NEIN.

Es ist offensichtlich, dass keine Wiederholungen auftauchen, denn eine Süden-Entscheidung kann jeweils nur einmal getroffen werden. Somit haben wir Fall (A).

Antwort auf Frage (K2): NEIN.

(Die zeitliche Reihenfolge, in welcher die fünf Süden-Entscheidungen fallen, ist irrelevant.)

Also handelt es sich um die Kombinatorik-Figur (oW|Rnb).

Schritt 3: Man hat Fall I und entscheidet sich etwa für das Urnenmodell.

Man nimmt die Kugeln E1, … , E8 ; das bedeutet $n = 8$. Eine Ziehung besteht aus einer Sequenz von fünf Kugeln; das bedeutet $k = 5$. (Wegen des Ergebnisses bei Schritt 2 ist klar, dass ohne Zurücklegen gezogen wird und die Reihenfolge der gezogenen Kugeln unwichtig ist.)

Schritt 4: Die Benutzung der Formel liefert:

Anzahl der möglichen Süden-Entscheidungen (und damit die Anzahl der möglichen Wege) ist $\binom{8}{5} = 1680.$

Man kann hier feststellen, dass das 4-Schritt-Modell nicht starr, sondern flexibel ist:

Auf der Basis einer individuellen inhaltlichen Deutung der Ausgangssituation (einmal Wege, die aus fünf Süden-Strecken und drei Osten-Strecken bestehen; einmal eine Auswahl von fünf Süden-Entscheidungen aus insgesamt acht Entscheidungen) wird mittels verschiedener Lösungswege (eben durch Benutzung verschiedener Kombinatorik-Figuren) die gleiche Lösung erzielt.

Allgemein formuliert: Schritt 1 erfordert Eigenständigkeit bei der Analyse des gegebenen Sachverhalts und Kreativität bei der Weise, wie dem Sachverhalt genügende Stichproben-Beispiele aufgeschrieben werden können. Je nach diesen individuell getroffenen Entscheidungen können sich dann unterschiedliche Lösungswege ergeben.

Beispiel 2:

Im Supermarkt „Kaufrausch" gibt es folgendes Sonderangebot: Beim Kauf von sechs Joghurts der Firma „Joghuretta" bekommt man einen Sonderpreis, welcher deutlich unter dem sechsfachen Preis eines einzelnen Joghurts liegt; dabei darf man zwischen zehn vorhandenen Sorten frei wählen.

Auf wie viele Arten ist die Nutzung dieses Sonderangebotes möglich?

Schritt 1:

Mögliche Einkäufe sind etwa (dabei seien die zehn verschiedenen Joghurtsorten dieser Firma mit S1, … , S10 bezeichnet):

Einkaufsbeispiel 1:	S1 S3 S5 S6 S7 S9
Einkaufsbeispiel 2:	S1 S2 S5 S8 S9 S10
Einkaufsbeispiel 3:	S3 S3 S6 S6 S8 S8
Einkaufsbeispiel 4:	S2 S2 S4 S4 S8 S8
Einkaufsbeispiel 5:	S4 S4 S4 S4 S4 S4
Einkaufsbeispiel 6:	S9 S7 S6 S5 S3 S1

Schritt 2:
Antwort auf Frage (K1): JA.
Es ist offensichtlich, dass Wiederholungen auftauchen können, denn man kann ja mehrere oder gar alle Joghurts von einer Sorte nehmen.
Somit haben wir Fall (B).
Antwort auf Frage (K3): NEIN.
Man erkennt an den Beispielen, dass die Vielfachheiten einer Joghurtsorte zufällig zustande kommen: Die Vielfachheiten hängen nämlich völlig von der persönlichen Vorliebe des Käufers ab.
Somit haben wir Fall (B2).
Antwort auf Frage (K2): NEIN.
Man erkennt durch das Variieren von Stichproben-Beispielen (hier das aus Einkaufsbeispiel 1 [Reihe 1] entstandene Einkaufsbeispiel 6 [Reihe 6]), dass die Reihenfolge der Joghurtsorten nicht wichtig ist; es zählt nur, welche Joghurtsorten im Einkaufskorb sind.
Also handelt es sich um die Kombinatorik-Figur (mW|Rnb).

Schritt 3: Man hat Fall I und entscheidet sich etwa für das Urnenmodell.
Man nimmt die Kugeln S1, … , S10 ; das bedeutet $n = 10$. Eine Ziehung besteht aus einer Sequenz von sechs Kugeln; das bedeutet $k = 6$. (Wegen des Ergebnisses bei Schritt 2 ist klar, dass mit Zurücklegen gezogen wird und die Reihenfolge der gezogenen Kugeln unwichtig ist.)

Schritt 4: Die Benutzung der Formel liefert:
Anzahl der möglichen Joghurteinkäufe ist $\binom{10+6-1}{6} = 5005$.

3.3 Didaktische Anmerkungen zu den Schritten des Modells

Zu Schritt 1: Zur Beantwortung der Fragen (K1) und (K2) wird ein Vorgehen eingefordert, welches durch den Begriff *Spielen mit Stichproben-Beispielen* bezeichnet werden kann. Damit ist gemeint, dass der Studierende (oder der Schüler/die Schülerin) eine Reihe von Beispielen notiert und kritisch hinterfragt, ob diese Beispiele alle Vorgaben der Aufgabe korrekt berücksichtigen.

Zu Schritt 2: Ausgangspunkt für diesen Entscheidungsbaum war die in Lehrveranstaltungen regelmäßig auftauchende Frage, was eigentlich der Unterschied zwischen den Kombinatorik-Figuren (mW|Rnb) und (mW|vA) ist bzw. wie man diesen Unterschied erkennt. Als entscheidende Hilfe hatte sich an dieser Stelle herausgestellt, eine Antwort auf die Frage (K3) zu gewinnen. Zur Erläuterung betrachten wir erneut zwei Aufgaben der Einleitung.

Bei der Aufgabe 1 der Einleitung sind die Vielfachheiten angegeben. Wählen wir das Alphabetmodell, so gibt es 146 Plätze (nämlich die vorhandenen Klausuren), auf welche die vier Zeichen 1, 2, 3, 4 (für Prüfer 1, Prüfer 2, Prüfer 3, Prüfer 4) verteilt werden sollen – wobei die Vielfachheit des Zeichens 1 gleich 53, die Vielfachheit des Zeichens 2 gleich 37, die Vielfachheit des Zeichens 3 gleich 20 und die Vielfachheit des Zeichens 4 gleich 36 ist.

Bei der Aufgabe 2 der Einleitung sind die Vielfachheiten der Geschmacksrichtungen dagegen abhängig von der Auswahl des Kunden, also zufallsabhängig (und also nicht von vornherein gegeben).

3.4 Grenzen bei der Benutzung des 4-Schritt-Modells

(1) Das 4-Schritt-Modell kann umständlich sein

Anhand der Aufgabe 4 der Einleitung lässt sich gut aufzeigen, dass es zur Lösung einer gegebenen Aufgabe auch einen einfacheren Weg als die Benutzung des 4-Schritt-Modells geben kann.
Diese Aufgabe lässt sich nämlich ganz einfach unter Benutzung des Allgemeinen Zählprinzips (AZP) lösen (also gänzlich unter Außerachtlassung des Vier-Schritt-Modells):
Für den ersten Tagungsteilnehmer gibt es acht freie Zimmer, für den zweiten Tagungsteilnehmer noch sieben, für den dritten noch sechs, für den vierten noch fünf. Das AZP liefert sofort die gesuchte Anzahl, nämlich $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Löst man diese Aufgabe dagegen mittels des Vier-Schritt-Modells, kann es auch Lösungswege geben, die aufwendiger sind. Das soll im Folgenden durch Angabe zweier Lösungswege, die sich bei Studierenden fanden, demonstriert werden. Je nach der gewählten Notationsform bei Schritt 1 des Modells kann die Lösung dann recht knapp (Lösungsweg 1) oder auch umständlich und fehleranfällig (Lösungsweg 2) sein.

[Dabei gelten im Folgenden die Abkürzungen
Z: Zimmer, G: Gast.]

Lösungsweg 1:

Bei Schritt 1 werden folgende Stichproben-Beispiele (in den Zeilen) notiert:

G 1	G 2	G 3	G 4
Z 3	Z 6	Z 7	Z 8
Z 4	Z 3	Z 5	Z 1
Z 2	Z 8	Z 1	Z 5
Z 1	Z 5	Z 8	Z 2

Man erkennt die Strategie bei diesen Notationen: Der betreffende Studierende nimmt die Gäste als Ausgangspunkt seiner Betrachtungen und gibt in einer Tabelle Beispiele für eine Zuordnung von der Menge der Zeichen für die Gäste auf die Menge der Zeichen für die Zimmer an.

Bei Schritt 2 wird (K1) mit NEIN, (K2) mit JA beantwortet. Damit liegt die Figur (oW|Rb) vor. Durch Benutzung des Urnenmodells bei Schritt 3 (mit den 8 Kugeln Z1, … , Z8 und 4 Ziehungen) ergibt sich bei

Schritt 4 die Lösung $\frac{8!}{(8-4)!}=1680$.

Lösungsweg 2:

Bei Schritt 1 werden (in den Zeilen der Tabelle) folgende Stichproben-Beispiele notiert:

Z 1	Z 2	Z 3	Z 4	Z 5	Z 6	Z 7	Z 8
---	G 1	---	G 2	G 3	---	---	G 4
G 2	---	G 1	---	G 4	---	G 3	---
---	G 3	G 4	---	G 2	G1	---	---
---	G 3	---	G 2	G 1	---	G 4	---

Man erkennt die Strategie bei diesen Notationen: Der betreffende Studierende nimmt die Zimmer als Ausgangspunkt seiner Betrachtungen und gibt in einer Tabelle Beispiele für eine Zuordnung der Menge der Zeichen für die Zimmer auf eine Menge, die aus vier Zeichen für die Gäste und einem Leerzeichen besteht, an.

Bei Schritt 2 wird (K1) mit NEIN und (K3) mit JA beantwortet. Argument für das JA bei (K3): Das Leerzeichen (bei den leeren Zimmern) hat die Vielfachheit 4, die Zeichen G i $(1 \le i \le 4)$ haben die Vielfachheit 1. Damit liegt Figur (mW|vA) vor. Durch Benutzung des Alphabetmodells bei Schritt 3 ergibt sich bei Schritt 4 die Lösung $\frac{8!}{4!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=1680$.

Bei Lösungsweg 2 kann es nun aber auch passieren, dass man, wenn man das Leerzeichen nicht explizit in die Notation aufnimmt, nicht weiterkommt und keine Lösung findet.

(2) Das 4-Schritt-Modell hat klare Grenzen

Das Vier-Schritt-Modell beschränkt sich auf Aufgabenstellungen, die unmittelbar zu einer der betrachteten fünf Grundfiguren führen. Bei einer komplizierteren Aufgabenstellung muss die Aufgabe gegebenenfalls so in Teilaufgaben zergliedert werden, dass mehrere Kombinatorik-Figuren sichtbar werden, welche dann (etwa mittels der Summenregel oder der Produktregel) verknüpft werden müssen.

4 Zusammenfassung

Das vorgestellte 4-Schritt-Modell bietet einige Vorteile:

Inhaltlicher Zugang zu Kombinatorik-Aufgaben:

Durch das schrittweise Vorgehen kann einerseits die (oft blinde und ungeleitete) Suche nach der zu einer gegebenen Aufgabe passenden Kombinatorik-Figur und andererseits die übliche Frage „Was ist wohl *n* und was ist wohl *k* ?“ vermieden werden.

Aufgrund der beim praktischen Einsatz des 4-Schritt-Modells beobachteten Ergebnisse bei Studierenden besteht Grund zu der Annahme, dass die oft vorhandenen Vorbehalte bezüglich der Kombinatorik-Aufgaben sehr stark abgeschwächt werden können.

Förderung prozessbezogener Kompetenzen:

Das Vier-Schritt-Modell (als Ganzes) soll als ein mögliches *Werkzeug* verstanden werden, welches Schüler/Studierende zur Lösung von Kombinatorik-Aufgaben verwenden können.

Durch ihre Aktivitäten bei den einzelnen Schritten können die Schüler/Studierenden gewisse Kompetenzen weiter ausbauen: Bei Schritt 1 des Modells wird ihre Fähigkeit des Problemlösens geschult: Durch die Angabe von konkreten Stichproben-Beispielen erfassen und erkunden sie das gegebene Problem und leisten somit eine Erhellung der Problems. Da sie dann bei Schritt 2 zu den inhaltlichen Fragen begründete Antworten geben müssen, wird die Fähigkeit des *Argumentierens* geschult. Bei Schritt 3 wird die Kompetenz des *Modellierens* betont: Sie müssen selbstständig die gegebene Problemstellung in das Urnen- oder Alphabetmodell übersetzen.

Handhabbarkeit/Einsetzbarkeit:

Das 4-Schritt-Modell ist einsetzbar bei solchen Kombinatorik-Aufgaben, welche zu einer der behandelten fünf Grundfiguren gehören. Durch das Modell ist ein Weg beschrieben, welcher in fast algorithmischer Weise durchlaufen werden kann. „Algorithmisch“ heißt dabei natürlich nicht „gedankenlos“, denn – wie erwähnt – sind bei jedem der Schritte Kompetenzen erforderlich.

Literatur

Engel, Arthur (1987): Stochastik. Stuttgart: Klett.

Hefendehl-Hebecker, Lisa; Törner, Günter: Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. In: DdM 4 (1984), 245–262

Henze, Norbert (2008): Stochastik für Einsteiger. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Ineichen, Robert (1984): Stochastik. Eine Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Luzern: Raeber.

Krengel, Ulrich (2003): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Kütting, Herbert; Sauer, Martin J. (2008): Elementare Stochastik. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Müller, P. H. (1991): Lexikon der Stochastik. Berlin: Akademie Verlag.

Selter, Christoph; Spiegel, Hartmut (2004): Elemente der Kombinatorik. In: Müller, G.; Steinbring, H.; Wittmann, E. C. (Hg.): Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyer, 291–310.

Anschrift des Verfassers

Dr. rer. nat. Martin J. Sauer
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik
Fliednerstraße 21
48149 Münster
mjsauer@math.uni-muenster.de

„Lottofieber in Deutschland“ – stochastisch betrachtet

GERD RIEHL, BARSINGHAUSEN

***Zusammenfassung**: Ein Pressebericht vom Herbst 2007 über das Lottofieber in Deutschland gibt Anlass, einige Fragestellungen zum Lottospiel zu analysieren. Hypothesentests mit Daten aus dieser Zeit zeigen eindrucksvoll, dass selbst große prozentuale Abweichungen vom Erwartungswert nicht unbedingt signifikant sind. In diesen Fällen ist auch die Normalverteilung als Approximation der Binomialverteilung problematisch.*

1 Einleitung

Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit dem Lottospiel kann man nur in bestimmten Fällen mit dem schlichten Laplaceansatz berechnen. Dies ist insbesondere für alle Aufgaben erlaubt, die sich auf den Ziehungsvorgang selbst beziehen, den man als Urnenexperiment ohne Zurücklegen auffasst, wobei die 49 Kugeln als physikalisch nicht unterscheidbar angesehen werden.

Dagegen versagt dieser Ansatz, wenn für eine konkrete Kombination von sechs Zahlen und eine konkrete Teilnehmerzahl nach der zu erwartenden Anzahl der Gewinner in den einzelnen Rängen oder den zu erwartenden Gewinnquoten gefragt ist. Man kann lediglich mittlere erwartete Quoten berechnen (Abschnitt 2), von denen aber die tatsächlichen Quoten in der Regel überzufällig stark abweichen werden (Abschnitt 3).

In Abschnitt 4 behandeln wir mit dem Jackpot zusammenhängende Probleme. Den Abschluss bilden einige Anmerkungen zur Normalverteilung und zu den verwendeten Tests sowie Hinweise auf mögliche Schüleraktivitäten.

2 Hoch- oder Tiefquotenreihe?

Nachdem bei den elf Lottoveranstaltungen in der Zeit vom 24. Oktober bis Ende November 2007 kein Spieler einen Treffer im 1. Rang erzielt hatte und der sogenannte Jackpot dadurch auf über 30 Mio. Euro angewachsen war, las man überall in der Presse vom „Lottofieber in Deutschland“. So berichtete die Hannoversche Allgemeine Zeitung über die Samstagziehung vom 1. Dezember am darauf folgenden Montag, also noch bevor die Auswertungen der Lottozentralen vorlagen, unter der Schlagzeile „Warten auf den Lotto-König“. In diesem Artikel wurden auch Einschätzungen und Prognosen eines „Lottoexperten“ zitiert (Abb. 1), die wir im Folgenden mathematisch analysieren wollen.